وزارة التعليم العالي
جامعة البعث

كلية العلوم

قسم الرياضيات

أطروحة ماجستير في التحليل الرياضي

للطالبة رشا طليمات

تحويل المعادلات التفاضلية الجزئية لجسم مرن إلى المعادلات التكاملية على سطح كرة

الأستاذ المشرف : أ.د.طالب غريبة

الأستاذ المشارك: د.منتجب الحسن

العام الدراسي ٢٠٠٩/٢٠١٠

كلمة شكر وتقدير

لا بد لنا ونحن نطل على أبواب المستقبل من أن نعبر عن شكرنا و تقديرنا لأساتذتنا الأفاضل.

ونخص منهم بالذكر الدكتور طالب غريبة والدكتور منتجب الحسن اللذين تفضلا بالإشراف على الأطروحة.

المحتويات

هدف الأطروحة:

بين العديد من الباحثين أن هناك مسائل قيم حدية وابتدائية في الرياضيات ، وهذه المسائل تصبح سهلة الحل إذا أمكن تحويلها إلى مسائل لجملة معادلات تكاملية . (انظر[1]).

حيث قام نوفاتسكي 1970 ، بالطريقة المباشرة ، بتحويل مسألة جسم هوك المرن إلى مسألة معادلات تكاملية ، ذلك عندما تكون المعادلات التفاضلية غير متجانسة والشروط الحدية غير متجانسة ، بينما الشروط الابتدائية متجانسة. كما قام إغناتشاك 1965-1970

بتحويل مسألة كمونات نوفاتسكي لجسم هوك المرن إلى مسألة معادلات تكاملية ، في الحالة التي تكون فيها المعادلات متجانسة والشروط الحدية متجانسة والشروط الإبتدائية غير متجانسة ، لكن في الحالة الخاصة التي تكون فيها الدوال الفيزيائية تتغير هرمونياً(توافقياً) مع الزمن. كما قام العديد من الباحثين (مثل مايزل) بالوصول إلى النتائج نفسها المذكورة أعلاه، بطرق مختلفة.

في البحث [11] (2009) ، تم استعراض طريقة كمونات نوفاتسكي بتقنية إغناتشاك (أنظر [7]) . بعدها تمت مناقشة طريقة كمونات نوفاتسكي (تقنية إغناتشاك) بتقنية ديشليفيتش القائمة على المؤثرات التفاضلية التحريكية المتجهية. كما تم في [11] حل مشكلة حساب الأجزاء الكمونية والأجزاء الدوارة للدوال المتجهية المعلومة.بعدها تم تحويل المسألة المصاغة بكمونات نوفاتسكي (تقنية إغناتشاك – ديشليفيتش) إلى مسألة توازن باستخدام مؤثر لابلاس التكاملي. أخيراً ، تم في [11] ، صياغة و إثبات مبرهنتين هامتين ساعدتا ، وبطريقة جديدة ، على تحويل مسألة التوازن المذكورة إلى مسألة جملة معادلات تكاملية ، ونوقشت الحالة التي تكون فيها الحالة البدائية لجسم هوك المرن ، كرة.

سنقوم في هذه الأطروحة بتوسيع نتائج البحث المذكور، وفي النهاية سيتم وضع مسألة هامة مفتوحة.

بعض المفاهيم الرياضية:

يلزمنا في هذه المقدمة بعض التعاريف الطبولوجية الهامة الآتية:

1-تعريف المجموعة المفتوحة:نقول عن مجموعة إنها مفتوحة إذا كان من أجل أي نقطة من نقاطها توجد كرة مفتوحة مركزها هذه النقطة ومحتواة في المجموعة.

2-تعريف: نقول عن النقطة xإنها نقطة جبهية أو حدودية للمجموعة A إذا كانت أي مجاورة لـ x تتقاطع مع A ومع متممة A .

مجموعة النقاط الجبهية لـ A نسميها جبهية المجموعة A ونرمز لها بالرمز $F_r(A)$.

3 -تعريف:نقول عن النقطة xإنها نقطة لاصقة بالمجموعة A إذا كان أي جوار للنقطة x يتقاطع مع A .

مجموعة النقاط اللاصقة لـ A نسميها لصاقة المجموعة A ونرمز لها بالرمز $\overline{A}$.

4- تعريف المجموعة المترابطة في الفضاء المتري (X,d) :

لتكن A مجموعة جزئية غير خالية في الفضاء المتري (X,d).نقول إن A مجموعة مترابطة في الفضاء المتري (X,d) إذا أمكن الربط بين أي نقطتين من نقاط A بخط منحني واقع بأكمله في A .

5- تعريف المنطقة في الفضاء المتري (X,d) :

نقول عن المجموعة الجزئية A من الفضاء المتري (X,d) أنها منطقة في (X,d) إذا وفقط إذا كانت مفتوحة ومترابطة في (X,d).

6-تعريف المنطقة وحيدة الترابط في الفضاء المتري (X,d) :

نقول عن المجموعة الجزئية غير الخالية A من الفضاء المتري (X,d) أنها منطقة وحيدة (بسيطة) الترابط في (X,d) إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

أ) A منطقة في الفضاء المتري (X,d) ،

ب) $F_r(A)$ (جبهية A في الفضاء المتري (X,d)) مجموعة مترابطة في (X,d).

مثال1:

في الفضاء المتري الاقليدي $\boldsymbol{R}^3$ تشكل الكرة المفتوحة $B(a,r)$ منطقة وحيدة الترابط .

7 - *المنطقة ثنائية الترابط في الفضاء المتري* (X,d) :

نقول عن المجموعة الجزئية غير الخالية A من الفضاء المتري (X,d) أنها منطقة ثنائية الترابط في (X,d) إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الآتيان:

أ) A منطقة في الفضاء المتري (X,d) ،

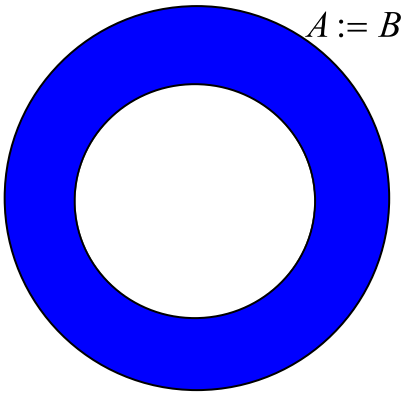
ب) $F_r(A)$ هي اجتماع مجموعتين منفصلتين ومترابطتين في (X,d).

مثال 2 :

إذا كان $0 < r_1 < r_2$ فإن المجموعة $A := B(a,r_2) \setminus B(a,r_1)$

تشكل منطقة ثنائية الترابط في الفضاء المتري

الإقليدي $\boldsymbol{R}^3$ (انظر الشكل المرافق)



8- *المنطقة ذات المرتبة n من الترابط في الفضاء المتري* (X,d) :

نقول عن المجموعة الجزئية غير الخالية A من الفضاء المتري (X,d) أنها منطقة ذات المرتبة n من الترابط في الفضاء المتري (X,d) إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

أ) A منطقة في الفضاء المتري (X,d) ،

ب) $F_r(A)$ عبارة عن اجتماع لـ n من المجموعات المنفصلة مثنى مثنى والمترابطة في (X,d).

9 - تعريف الدالة الحقيقية بـ n متغير حقيقي، من الصف C^m في A حيث A مجموعة جزئية مفتوحة في الفضاء المتري الإقليدي $\mathbf{R}^n$:

لتكن $f : A \to \mathbf{R}$ دالة حقيقية بـ n *متغير حقيقي* ومعرفة على المجموعة المفتوحة A. نقول أن f من الصف C^m في A *ونكتب* رمزاً لذلك $f \in C^m(A)$، إذا وفقط إذا كانت f مستمرة في A وجميع مشتقاتها الجزئية حتى المرتبة m موجودة ومستمرة في A.

سيلزمنا أيضاً بعض المفاهيم من *التحليل المتجهي* :

10 - تدرج دالة سلمية:

لتكن A مجموعة مفتوحة في الفضاء الإقليدي $\mathbf{R}^3$ و $f : A \to \mathbf{R}$ دالة حقيقية تتبع لثلاثة متحولات حقيقية ومن الصف C^1 في A، وقاعدة ربطها: $M \equiv (x_1, x_2, x_3) \to f(M)$، عندئذٍ نسمي الدالة المتجهية:

$$\overrightarrow{grad}\ f := (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}) : A \to \mathbf{R}^3$$

المعرَّفة بالشكل: $\overrightarrow{grad}\ f(M) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(M), \frac{\partial f}{\partial x_2}(M), \frac{\partial f}{\partial x_3}(M) \right)$، بتدرج الدالة الحقيقية f. ونلاحظ أن التدرج يقرن بكل دالة حقيقية دالة متجهية.

11 – تفرق ودوران دالة متجهية:

لتكن A مجموعة مفتوحة قي الفضاء الإقليدي $\mathbf{R}^3$ ولتكن لدينا الدوال الحقيقية الثلاث: $f_1, f_2, f_3 : A \to \mathbf{R}$، التي كلٍ منها من الصف C^1 في A

ولنأخذ الدالة المتجهية: $\vec{f} := (f_1, f_2, f_3) : A \to \mathbf{R}^3$، المعرَّفة بالشكل: $\vec{f}(M) = \left(f_1(M), f_2(M), f_3(M)\right)$، عندئذٍ:

أ) نسمي الدالة الحقيقية: $div\,\vec{f} := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} : A \to \mathbf{R}$، المعرَّفة بالشكل: $div\,\vec{f}(M) := \frac{\partial f}{\partial x_1}(M) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(M) + \frac{\partial f}{\partial x_3}(M)$، بتفرق الدالة المتجهية $\vec{f}$.

ب) وإذا رمزنـا بـ $[\, O \,, (\vec{e}_1 \,, \vec{e}_2 \,, \vec{e}_3)\,]$ للجملـة الإحداثيـة الديكارتيـة فـي الفضـاء الإقليـدي $\boldsymbol{R}^3$، فإننا نسمي الدالة المتجهية:

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{f} := \overrightarrow{grad} \wedge \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} : A \to \boldsymbol{R}^3$$

المعرَّفة بالشكل: $\overrightarrow{rot}\ \vec{f}(M) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} (M)$ ، بدوران الدالة المتجهية $\vec{f}$.

ولنلاحظ أيضاً أن التفرق ينقلنا من دالة متجهية إلى دالة حقيقية (عكس التدرج) بينما الدوران يحافظ على المتجهية ، فهو ينقل الدالة المتجهية إلى دالة متجهية.

بعض خواص الـــ $\overrightarrow{grad}$ **و** div **و** $\overrightarrow{rot}$ **:**

لتكن $\vec{f}$ دالة متجهية من الصف C^1 ، و f و g دالتين حقيقيتين أيضاً من الصف C^1 ، عندئذٍ يكون:

(1) - $\overrightarrow{grad}\,(f\,g) = f\ \overrightarrow{grad}\ g + g\ \overrightarrow{grad}\, f$

(2) - $div\,(g\,\vec{f}\,) = g\ div\,\vec{f} + (\,\overrightarrow{grad}\ g)\cdot \vec{f}$

(3) - $\overrightarrow{rot}\,(g\,\vec{f}\,) = g\ \overrightarrow{rot}\ \vec{f} + (\,\overrightarrow{grad}\ g)\wedge \vec{f}$

مبرهنة غوص:

لتكن τ منطقة أحادية الترابط (أوبسيطة الترابط) في الفضـاء الإقليدي $\boldsymbol{R}^3$، ولنفرض أن τ محاطـة بالسطح المغلق S، ولـتكن $M \equiv (x_1, x_2, x_3)$ نقطـة مـا مـن S ،ولنرمز بـــ $\vec{n}$ لمتجـه واحـدة النـاظم علـى السـطح S فـي M والموجَّـه نحـو خـارج S.لـتكن أيضـاً $f_i : \tau \to \boldsymbol{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ ثــلاث دوال حقيقيــة قاعــدة ربطهــا: $M \equiv (x_1, x_2, x_3) \to f_i(M)$ ، ومــن الصـــف C^1 فـــي τ والصـــف C^0 فـــي $\bar{\tau} = \tau \cup S$ ، ولنأخـــذ الدالــــة المتجهيـــة $\vec{f} := (f_1, f_2, f_3) : \tau \to \boldsymbol{R}^3$ ، عندئـذٍ يكـون كـلٍ مـن التكـاملين الآتيـين موجـوداً: التكامـل

الحجمي $\int_{\tau} div\,\vec{f}\,(M)\,d\tau$ والتكامل السطحي $\int_{S} (\vec{f}.\vec{n})(M)\,ds$ ، وتتحقق العلاقة الآتية:
$\int_{\tau} div\,\vec{f}\,(M)\,d\tau = \int_{S} (\vec{f}.\vec{n})(M)\,ds$ ، حيث $\vec{f}.\vec{n}$ هي الدالة الحقيقية: $\vec{f}.\vec{n} : \tau \to \mathbf{R}$ المعرّفة بالشكل التالي: $(\vec{f}.\vec{n})(M) = \vec{f}(M).\vec{n}$ ، وحيث $\vec{f}(M).\vec{n}$ هو الجداء الداخلي للمتجهين $\vec{f}(M)$ و $\vec{n}$.

سنحتاج أيضاً بعض المفاهيم من الهندسة التفاضلية:

ملاحظة: كافة الأدلة اللاتينية تأخذ القيم $1 , 2 , 3$. مثال: الكتابة $A_i = B_i$ تعني أن العلاقة محققة من أجل $i = 1 , 2 , 3$.

اتفاقية الجمع على الأدلة المتكررة: إذا كانت لدينا عبارة جبرية ، أحد حدودها يحوي دليلاً مكرراً مرتين ، أو أحد حدودها جداء مقدارين ، يظهر فيه دليل مكرر مرتين ؛ مرةً في المقدار الأول ومرةً أخرى في المقدار الثاني ، عندئذٍ اتفاقية الجمع على الأدلة المكررة تعني إجراء عملية الجمع على هذا الدليل عند تحوله على قيمه: $1 , 2 , 3$.

<u>مثال:</u> $A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$ ، $A_i\,B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$

خواص ناتجة عن اتفاقية الجمع على الأدلة المكررة:

الخاصة الأولى: قد يحوي الحد الجبري على أكثر من دليل مكرر واحد . في هذه الحالة تطبيق اتفاقية الجمع ابتداءً من أي من الدلائل يعطي نفس النتيجة.

<u>مثال:</u> $A_{ij}\,B_{ij} = A_{1j}\,B_{1j} + A_{2j} B_{2j} + A_{3j} B_{3j} = A_{i1}\,B_{i1} + A_{i2}\,B_{i2} + A_{i3}\,B_{i3}$

الخاصة الثانية: الضرب تجميعي. <u>مثال:</u> $(A_{is}\,B_{ij})\,C_{sj} = A_{is}\,(B_{ij}\,C_{sj})$

الخاصة الثالثة: الضرب توزيعي على الجمع.

<u>مثال:</u> $A_{ij}\,(B_{ijk} + C_{ijs}) = A_{ij}\,B_{ijk} + A_{ij}\,C_{ijs}$

الخاصة الرابعة: خاصة تصفية دلتا كرونيكر: $A_{ij}\,\delta_{jk}=A_{ik}$ ، حيث الرمز δ_{jk} يدل على دلتا كرونيكر: $\delta_{jk}=\begin{cases}1\ ,\ j=k\\0\ ,\ j\neq k\end{cases}$.

تمرين: أثبت أن $A_{jk}\,\delta_{jk}=A_{ii}$. الحل: نطبق اتفاقية الجمع بالنسبة إلى k مثلاً، ومن ثم نستخدم الخاصة السابقة فنحصل على :

$$A_{jk}\,\delta_{jk}=A_{j1}\,\delta_{j1}+A_{j2}\,\delta_{j2}+A_{j3}\,\delta_{j3}=A_{11}+A_{22}+A_{33}=A_{ii}\ .$$

تعريف مناوب ليفي – تشيفيتي : نسمي ثلاثي الأدلة e_{ijk} ، المعرَّف بالشكل:

$$e_{ijk}=\begin{cases}0\ ,\ i=j\ \vee\ j=k\ \vee\ i=k\\ 1\ ,\ (i\,,\,j\,,\,k)\ \text{تبديلة زوجية للاعداد}\ 1\,,2\,,3\\ -1\ ,\ (i\,,\,j\,,\,k)\ \text{تبديلة فردية للأعداد}\ 1\,,2\,,3\end{cases}$$

بمناوب ليفي – تشيفيتي.

مثال: $e_{123}=1\ ,\ e_{231}=1\ ,\ e_{321}=-1\ ,\ e_{112}=0$

خواص مناوب ليفي تشيفتي :

الخاصة الأولى: الخاصة التناظرية العكسية : *إذا بدلنا مابين دليلين في مناوب ليفي – تشيفيتي* e_{ijk} ، فإننا نحصل على مقدار يساوي المقدار الأصلي مسبوقاً بإشارة (ـــ) :

$$e_{jik}=e_{ikj}=e_{kji}=-e_{ijk}$$

الخاصة الثانية: إذا كانت $\{A_{jk}\}_{3\times 3}$ مصفوفة أعداد حقيقية من السعة 3×3 ومتناظرة ($A_{jk}=A_{kj}$) ، عندئذٍ يكون $e_{ijk}\,A_{jk}=0$ (حيث: $i=1\,,2\,,3$).

نتيجة عن التعريف السابق لمناوب ليفي – تشيفيتي:

لنضع $\underline{1}=(1\,,0\,,0)$ و $\underline{2}=(0\,,1\,,0)$ و $\underline{3}=(0\,,0\,,1)$ ، وبشكل عام $\underline{i}$ هي الثلاثية التي جميع عناصرها معدومة ما عدا العنصر رقم i فهو يساوي الواحد. عندئذٍ يكون: $e_{ijk}=\begin{vmatrix}\underline{i}\\\underline{j}\\\underline{k}\end{vmatrix}$.

نتيجة (مناوب ليفي – تشيفيتي بدلالة دلتا كرونيكر) :

إذا لاحظنا أن $\underline{1} = (\delta_{11}, \delta_{12}, \delta_{13})$ ، $\underline{2} = (\delta_{21}, \delta_{22}, \delta_{23})$ ، $\underline{3} = (\delta_{31}, \delta_{32}, \delta_{33})$

وبالتالي $\underline{i} = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$ ، فيكون عندئذٍ :

$$e_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}$$

نتيجة:

إذا كانت $\{A_{jk}\}_{3\times3}$ مصفوفة أعداد حقيقية ورمزنا لمعينها بـ $|A|$ ، فيكون:

$$|A| = e_{ijk}\, A_{i1}\, A_{j2}\, A_{k3}$$

نتيجة: إذا كانت $\{A_{jk}\}_{3\times3}$ مصفوفة أعداد حقيقية ، فيكون عندئذٍ :

$$\begin{vmatrix} A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} \\ A_{j1} & A_{j2} & A_{j3} \\ A_{k1} & A_{k2} & A_{k3} \end{vmatrix} = e_{lmn}\, A_{il}\, A_{jm}\, A_{kn}$$

من التعريف الأساسي لمناوب ليفي – تشيفيتي ينتج أيضاً مايلي:

إذا كانت $\{A_{jk}\}_{3\times3}$ مصفوفة أعداد حقيقية ورمزنا لمعينها بـ $|A|$ ، فيكون:

$$\begin{vmatrix} A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} \\ A_{j1} & A_{j2} & A_{j3} \\ A_{k1} & A_{k2} & A_{k3} \end{vmatrix} = |A|\, e_{ijk}$$

نتيجة:

وبملاحظة أن $e_{ijk}\, e_{ijk} = 6$ ، فينتج من الملاحظتين السابقتين أن:

$$|A| = \frac{1}{6}\, e_{ijk}\, e_{lmn}\, A_{il}\, A_{jm}\, A_{kn}$$

الجداء الخارجي بلغة مناوب ليفي – تشيفيتي :

لتكن $[\,O, (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)\,]$ جملة إحداثية ديكارتية في الفضاء الإقليدي $\boldsymbol{R}^3$ ، و $\vec{A} = A_i\, \vec{e}_i$

و $\vec{B} = B_j\, \vec{e}_j$ و $\vec{C} = C_k\, \vec{e}_k$ ثلاثة متجهات من $\boldsymbol{R}^3$ ، عندئذٍ يكون:

$\vec{A}\wedge\vec{B} = e_{ijk}\,A_j\,B_k\,\vec{e}_i = e_{ijk}\,A_i\,B_j\,\vec{e}_k$: ، وإذا كتبنا $\vec{D} \equiv D_i\vec{e}_i := \vec{A}\wedge\vec{B}$ ،

فيكون: $D_i = e_{ijk}\,A_j\,B_k$ أو $D_k = e_{ijk}\,A_i\,B_j$.

الجداء المختلط بلغة مناوب ليفي – تشيفيتي :

$[\,\vec{A}\,,\vec{B}\,,\vec{C}\,] = e_{ijk}\,A_i\,B_j\,C_k$.

ملاحظة: إذا كانت f دالة حقيقية تتبع للمتحولات الحقيقية x_1 و x_2 و x_3، وفرضنا أن f من الصف C^1 ، فسنصطلح أن $\frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{,i}$ ،و بالتالي إذا كانت f من الصف C^2 فسيصبح الاصطلاح : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j} = f_{,ij}$.

كتابة الـ $\overrightarrow{grad}$ و div و $\overrightarrow{rot}$ باستخدام اتفاقية الجمع الدليلي :

وفقاً لاتفاقية الجمع الدليلي:

أولاً : تدرج الدالة الحقيقية f هو: $\overrightarrow{grad}\,f := \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\vec{e}_i = f_{,i}\,\vec{e}_i$ ،

ثانياً : تفرق الدالة المتجهية $\vec{f} \equiv (f_1, f_2, f_3)$ هو : $div\,\vec{f} = \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = f_{i,i}$ ،

ثالثاً : دوران الدالة المتجهية $\vec{f} \equiv (f_1, f_2, f_3)$ هو :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{f} := \overrightarrow{grad}\wedge\vec{f} = e_{ijk}\,\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\,\vec{e}_i = e_{ijk}\,f_{k,j}\,\vec{e}_i \ .$$

مشتق دالة حقيقية في اتجاه متجه واحدة $\vec{n}$:

لتكن D مجموعة مفتوحة في الفضاء الإقليدي $\boldsymbol{R}^3$ و $f : D \to \boldsymbol{R}$ دالة حقيقية من الصف C^1 في D ، عندئذٍ يعطى مشتق الدالة f في الاتجاه $\vec{n} = n_i\,\vec{e}_i$ ، بالعلاقة:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{grad}\,f = n_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

مبرهنة ستوكس - هيلمهولتز:

لتكن τ منطقة وحيدة الترابط في الفضاء الاقليدي ثلاثي البعد $\boldsymbol{R}^3$ ، و $\vec{f}:\tau \to \boldsymbol{R}^3$ دالة متجهية مستمرة في τ ، عندئذ توجد دالتان : الأولى حقيقية : $\Phi:\tau \to \boldsymbol{R}$ من الصف C^1 في τ ، والثانية متجهية $\vec{\Psi}:\tau \to \boldsymbol{R}^3$ ، أيضاً من الصف C^1 في τ بحيث يكون :

$$\vec{f} = \overrightarrow{grad}\ \Phi + \overrightarrow{rot}\ \vec{\Psi} \qquad \text{(وبحيث يكون: } div\ \vec{\Psi} = 0 \text{)}$$

نسمي $\overrightarrow{grad}\ \Phi$ بالجزء الكموني لـلدالة المتجهية $\vec{f}$ ، كما ندعو $\overrightarrow{rot}\ \vec{\Psi}$ بالجزء الدوار للدالة المتجهية $\vec{f}$. وإذا كان $\overrightarrow{rot}\ \vec{\Psi} = \vec{0}$ ، فنقول إن الدالة المتجهية $\vec{f}$ كمونية ، أما إذا كان

$\overrightarrow{grad}\ \Phi = \vec{0}$ ، فنقول إن الدالة المتجهية $\vec{f}$ دوَّارة.

صيغ ستوكس-هيلمهولتز السلمية باستخدام اتفاقية الجمع:

لنفرض أن $\vec{f} \equiv f_i\ \vec{e}_i$ و $\vec{\Psi} \equiv \Psi_i\ \vec{e}_i$. وجدنا سابقاً أن: $\overrightarrow{grad}\ \Phi := \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}\ \vec{e}_i = \Phi_{,i}\ \vec{e}_i$

و $\overrightarrow{rot}\ \vec{\Psi} = e_{ijk}\dfrac{\partial \Psi_k}{\partial x_j}\ \vec{e}_i = e_{ijk}\ \Psi_{k,j}\ \vec{e}_i$. بالتعويض في صيغة ستوكس – هيلمهولتز المتجهية (المبرهنة السابقة) ، نجد: $f_i\ \vec{e}_i = (\Phi_{,i} + e_{ijk}\ \Psi_{k,j})\ \vec{e}_i$.

وبالإسقاط على $\vec{e}_i$ ، نحصل على صيغ ستوكس – هيلمهولتز السلمية التالية:

$$f_i = \Phi_{,i} + e_{ijk}\ \Psi_{k,j} \qquad \text{(حيث: } \Psi_{k,k} = 0 \text{)}$$

تعريف مؤثر لابلاس السلمي:

نسمي المؤثر التفاضلي السلمي $\nabla^2 := div\ \overrightarrow{grad}$ المعرف بالشكل $\nabla^2 f := div\,(\overrightarrow{grad}\ f)$ (حيث f دالة حقيقية) ، بمؤثر لابلاس السلمي.

تعريف مؤثر لابلاس المتجهي:

نسمي المؤثر التفاضلي المتجهي : $\vec{\nabla}^2 := \overrightarrow{grad}\ div - \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}$ ، المعرف بالشكل#: $\vec{\nabla}^2\vec{f} := \overrightarrow{grad}\,(div\,\vec{f}\,) - \overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{f}\,)$ (حيث $\vec{f}$ دالة متجهية) ، بمؤثر لابلاس المتجهي.

نتيجة: إذا كانت $[\,O,(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)\,]$ جملة إحداثية ديكارتية في الفضاء الإقليدي $\boldsymbol{R}^3$،

و $f = f_i \vec{e}_i$ دالة متجهية من الصف C^2 ، عندئذٍ يكون: $\vec{\nabla}^2 \vec{f} = (\nabla^2 f_i)\, \vec{e}_i$.
وسنكتب اختصاراً لذلك: $\vec{\nabla}^2 = (\nabla^2, \nabla^2, \nabla^2)$.

نتيجة :
وإذا كانت $\vec{f} = f_i \vec{e}_i$ دالة متجهية ، حيث f_i دوال حقيقية من الصف C^2 وتتبع لمتحولات الموضع x_1 و x_2 و x_3 وللزمن t ، ورمزنا بـ $\vec{L}_{(a,b)} = a\, \vec{\nabla}^2 + b\, \partial_t^2$
و بـــ : $L_{(a,b)} = a\, \nabla^2 + b\, \partial_t^2$ ، حيث a و b زوج من الأعداد الحقيقية

و $\partial_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$

و $\partial_t^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ ، عندئذٍ يكون: $\vec{L}_{(a,b)}\, \vec{f} = [\, L_{(a,b)} f_i \,]\, \vec{e}_i$ ،

وسنكتب اختصاراً لذلك:

$$\vec{L}_{(a,b)} = \left(L_{(a,b)} ,\, L_{(a,b)} ,\, L_{(a,b)} \right)$$

خواص مؤثري لابلاس المتجهي والسلمي:
إن مؤثري لابلاس المتجهي والسلمي يحققان الخوص التالية:

(1) - $\overrightarrow{grad}\, \nabla^2 = \vec{\nabla}^2\, \overrightarrow{grad}$

(2) - $div\, \vec{\nabla}^2 = \nabla^2\, div$

(3) - $\overrightarrow{rot}\, \vec{\nabla}^2 = \vec{\nabla}^2\, \overrightarrow{rot}$

نتائج:

(1) - $\overrightarrow{grad}\, L_{(a,b)} = \vec{L}_{(a,b)}\, \overrightarrow{grad}$

(2) - $div\, \vec{L}_{(a,b)} = L_{(a,b)}\, div$

(3) - $\overrightarrow{rot}\, \vec{L}_{(a,b)} = \vec{L}_{(a,b)}\, \overrightarrow{rot}$

- (4) $$L_{(a_1, b_1)}\, L_{(a_2, b_2)} = L_{(a_2, b_2)}\, L_{(a_1, b_1)}$$

- (5) $$\vec{L}_{(a_1, b_1)}\, \vec{L}_{(a_2, b_2)} = \vec{L}_{(a_2, b_2)}\, \vec{L}_{(a_1, b_1)}$$

ومن أجل متطلبات الأطروحة أيضاً ، تلزمنا من التحليل المتجهي ، المبرهنة الآتية ، المتعلقة بمؤثر لابلاس السلمي:

مبرهنة (مطابقة غرين من أجل لابلاسيان):

لتكن V مجموعة بسيطة الترابط في الفضاء الإقليدي $\boldsymbol{R}^3$، ولنرمز بـ S للسطح المغلق الذي يحيط بـــ V، وليكن $\vec{n} = n_i\, \vec{e}_i$ متجه واحدة الناظم على السطح S في النقطة $M \equiv (x_1, x_2, x_3)$ من S، والموجه نحو خارج S. ولتكن Φ_1 و Φ_2 دالتين حقيقيتين من الصف C^1 في $V \cup S$ ، والصف C^2 في V .عندئذ تكون العلاقة التكاملية الآتية محققة:

$$\int_V (\Phi_1 \nabla^2 \Phi_2 - \Phi_2 \nabla^2 \Phi_1)\, dV = \int_S (\Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} - \Phi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n})\, dS$$

البرهان:

سنذكر البرهان بشكل مختصر.بحسب خواص الــ $\overrightarrow{grad}$ و الــ div ، نجد أن:

$$div\, (\Phi_1\, \overrightarrow{grad}\, \Phi_2) = \Phi_1\, div\, (\overrightarrow{grad}\, \Phi_2) + (\overrightarrow{grad}\, \Phi_1) \cdot (\overrightarrow{grad}\, \Phi_2)$$

$$div\, (\Phi_2\, \overrightarrow{grad}\, \Phi_1) = \Phi_2\, div\, (\overrightarrow{grad}\, \Phi_1) + (\overrightarrow{grad}\, \Phi_2) \cdot (\overrightarrow{grad}\, \Phi_1)$$

وبما أن: $\nabla^2 \Phi_1 = div\, (\overrightarrow{grad}\, \Phi_1)$ و $\nabla^2 \Phi_2 = div\, (\overrightarrow{grad}\, \Phi_2)$ ، وكون أن الجداء الداخلي تبديلي ، فتصبح العلاقتان السابقتان بالشكل:

$$div\, (\Phi_1\, \overrightarrow{grad}\, \Phi_2) = \Phi_1 \nabla^2 \Phi_2 + (\overrightarrow{grad}\, \Phi_1) \cdot (\overrightarrow{grad}\, \Phi_2)$$

$$div\, (\Phi_2\, \overrightarrow{grad}\, \Phi_1) = \Phi_2 \nabla^2 \Phi_1 + (\overrightarrow{grad}\, \Phi_1) \cdot (\overrightarrow{grad}\, \Phi_2)$$

ينتج عن ذلك وعن خطية الـــ div أن :

$$div\, (\Phi_1\, \overrightarrow{grad}\, \Phi_2 - \Phi_2\, \overrightarrow{grad}\, \Phi_1) = div\, (\Phi_1\, \overrightarrow{grad}\, \Phi_2) - div\, (\Phi_2\, \overrightarrow{grad}\, \Phi_1) =$$

$$= \Phi_1 \nabla^2 \Phi_2 - \Phi_2 \nabla^2 \Phi_1$$

وهذا الكلام محقق في V.

وبمكاملة طرفي العلاقة السابقة تكاملاً حجمياً في V ، ومن ثم باستخدام مبرهنة غوص نجد:

$$\int_V (\Phi_1 \nabla^2 \Phi_2 - \Phi_2 \nabla^2 \Phi_1)\, dV = \int_S (\Phi_1 \overrightarrow{grad}\, \Phi_2 - \Phi_2 \overrightarrow{grad}\, \Phi_1)\cdot \vec{n}\, dS$$

$$= \int_S [\, \Phi_1 (\vec{n}\cdot \overrightarrow{grad}\, \Phi_2) - \Phi_2 (\vec{n}\cdot \overrightarrow{grad}\, \Phi_1)\,]\, dS$$

وبما أن: $\vec{n}\cdot \overrightarrow{grad}\, \Phi_1 = \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial n}$ و $\vec{n}\cdot \overrightarrow{grad}\, \Phi_2 = \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial n}$ ، فإننا نجد أن:

$$\int_V (\Phi_1 \nabla^2 \Phi_2 - \Phi_2 \nabla^2 \Phi_1)\, dV = \int_S (\Phi_1 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} - \Phi_2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n})\, dS \quad .$$

مؤثر لابلاس التكاملي :

ليكن $f(t)$ دالة حقيقية معرفة على $\boldsymbol{R}^+ = [\,0\,,\infty\,[$. إذا كان التكامل التالي:

$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ موجوداً ، فإننا ندعو $f(t)$ أصلاً ، كما ندعو التكامل المذكور تحويل لابلاس للتابع $f(t)$ ، ونرمز لهذا التحويل بالرمز $\pounds\ [f(t)]$ أو بالرمز $\bar{f}(s)$ أو بالرمز $F(s)$ ؛

$$\pounds\ [f(t)] = \bar{f}(s) = F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

تعريف(شرطا دير يخليه الأول والثاني لدالة حقيقية على مجال حقيقي):

ليكن $]a,b[$ مجالاً حقيقياً مفتوحاً ومحدوداً، ولتكن $f(x)$ دالة حقيقية معرفة على هذا المجال.

نقول أن $f(x)$ تحقق شرط دير يخليه الأول على $]a,b[$ إذا وفقط إذا تمكنا من تجزئة المجال $]a,b[$ إلى عدد منته من المجالات الجزئية تكون $f(x)$ مطردة عليها .

نقول عن الدالة $f(x)$ إنها تحقق شرط دير يخليه الثاني على $]a,b[$ إذا وفقط إذا كانت مستمرة باستثناء عدد منته من نقاط الانقطاع من النوع الأول .

تعريف الدالة الحقيقية التي مرتبتها لاتزيد عن مرتبة الدالة الأسية :

لتكن $f(x)$ دالة حقيقية معرفة على $]a,b[$. نقول عن الدالة $f(x)$ إنها من مرتبة لا تزيد عن مرتبة الدالة الأسية على $]a,b[$ إذا وفقط إذا وجد عددان حقيقيان $0 < \rho$، $c \geq 0$
بحيث يكون: $\left|f(x)\right| \leq ce^{\rho x} \;\; ; \;\; \forall x \in \left]a,b\right[$

مبرهنة:

إذا كانت الدالة $f(t)$ المعرفة على $\boldsymbol{R}^+$ تحقق شرطي دير يخليه الأول والثاني في كل مجال $]a,b[$ مفتوح ومحدود وجزئي من $\boldsymbol{R}^+$ ،وكانت الدالة $f(t)$ من مرتبة لا تزيد عن مرتبة الدالة الأسية على $]0,\infty[$ ، فيكون عندئذٍ $f(t)$ أصلاً .

يتمتع تحويل لابلاس التكاملي بالخاصة التالية:

خاصة (الانتقال من مشتق الدالة إلى الدالة نفسها):

إذا كانت الدالة $f(t)$ من الصف C^1 في $\boldsymbol{R}^+$ ، ومحدودة في جوار الـ ∞ ، وفرضنا أن $f(0) = a$ ، فإنه عندئذٍ يكون $\dot{f}(t)$ أصلاً وتتحقق العلاقة التالية:

$$£ \; [\dot{f}(t)] \; = \; s\,F(s) \; - \; a$$

حيث: $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\; dt$ هو تحويل لابلاس التكاملي للتابع $f(t)$.

نتيجة:

إذا كانت الدالة $f(t)$ من الصف C^2 في $\boldsymbol{R}^+$ ، وكان كل من $f(t)$ و $\dot{f}(t)$ محدوداً في جوار الـ ∞ ، وفرضنا أن $f(0) = a$ و $\dot{f}(0) = b$ ، فعندئذٍ يكون $\ddot{f}(t)$ أصلاً وتتحقق العلاقة التالية:

$$£ \; [\ddot{f}(t)] \; = \; s^2\,F(s) \; - \; (s\,a \; + \; b)$$

حيث: $F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\; dt$ هو تحويل لابلاس التكاملي للتابع $f(t)$.

الفصل الأول عرض المسألة

نموذج هوك:

تتعلق المسألة بالنموذج الرياضي لجسم هوك (انظر [1]) ، حيث الجسم مرن ومؤلف من نقاط مادية ، و ذو تشوهات صغيرة ، ومتجانس وموحد خواص المرونة (ايزوتروبي)، و معين بثابتين ماديين $\lambda > 0$ و $\mu > 0$. سنفترض أن الجسم يحتجز في اللحظة الابتدائية $t = 0$ ، منطقة وحيدة الترابط Ω في الفضاء الاقليدي ثلاثي البعد $\boldsymbol{R}^3$. وسنفترض أيضاً أن كافة الدوال الفيزيائية المعبِّرة عن الحالة الميكانيكية المرنة للجسم المذكور هي دوال ملساء بالقدر الكافي فيΩ، وتتبع لمتحولات الموضع $M \equiv (x_1, x_2, x_3)$ والزمن t .

إضافة لما سبق سنفترض أن كافة الأدلة......... $i\,,\ j\,,\ k\,,$ تأخذ القيم $1\,,\ 2\,,\ 3$ ، وسنعتبر اتفاقية الجمع الدليلي (اتفاقية الجمع على الأدلة المكررة).

مثال على جسم هوك :كرة حديد مؤلفة من نقاط مادية.

الحالة التحريكية المرنة لجسم هوك:

توصف الحالة التحريكية المرنة لجسم هوك ، من خلال مجموعة الحقول الفيزيائية: $(\vec{u}\,,\, \underset{\sim}{\varepsilon}\,,\, \underset{\sim}{\sigma})$ ، حيث $\vec{u}$ دالة متجهية تدعى دالة متجه الإزاحة ، $\underset{\sim}{\varepsilon}$ دالة تنسورية تدعى تنسور الانفعال وهو متناظر، $\underset{\sim}{\sigma}$ دالة تنسورية تدعى تنسور الإجهاد ، وهو أيضاً متناظر. وإذا رمزنا بــ $T = [\,0\,,\infty\,[$ و $T^+ =]\,0\,,\infty\,[$ ، فإن الدوال الفيزيائية السابقة يمكن أن تمثل في $\Omega \times T^+$ وفي الجملة الديكارتية $[\,O\,,(\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)\,]$ ، بالشكل:

$$\vec{u} \equiv (u_1 , u_2 , u_3) \qquad (1.1)$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \qquad (1.2)$$

$$\underset{\sim}{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \qquad (1.3)$$

حيث أن مصفوفتي المركبات لـكلٍ من $\underset{\sim}{\varepsilon}$ و $\underset{\sim}{\sigma}$ متناظرتان.

النموذج الرياضي لجسم هوك:

المطلوب هو إيجاد مجموعة الحقول الفيزيائية $(\vec{u} , \underset{\sim}{\varepsilon} , \underset{\sim}{\sigma})$ في $\Omega \times T$ ، التي هي من الشكل (1.1) ، (1.2) و (1.3) والمحققة لمعادلات الحقل والعلاقات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية:

- *معادلات الحركة المحققة في* $\Omega \times T^+$:

$$\sigma_{j i , j} + X_i = \rho \, \ddot{u}_i \qquad (1.4)$$

حيث: الدالة المتجهية $\vec{X} \equiv (X_1 , X_2 , X_3)$ معطاة في $\Omega \times T^+$ ، وتمثل حقل القوة الحجمية(volume force) للجسم ، $\rho > 0$ هي الكثافة الحجمية للجسم (وهي مقدار ثابت لأن الجسم متجانس). النقطة تعني المشتق الجزئي بالنسبة إلى الزمن:

$$\dot{f} = \frac{\partial}{\partial t} f \quad \text{و} \quad \ddot{f} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} f \, .$$

- *معادلات الاستمرار المحققة في* $\Omega \times T$:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} = 0 \qquad (1.5)$$

- *العلاقات الهندسية المحققة في* $\Omega \times T^+$:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(u_{i,j} + u_{j,i} \right) \qquad (1.6)$$

- *المعادلات التأسيسية المحققة في* $\Omega \times T$:

$$\sigma_{ji} = 2\mu \, \varepsilon_{ji} + \lambda \, \varepsilon_{kk} \, \delta_{ij} \qquad (1.7)$$

- *الشروط الحدية المحققة على* $\partial \Omega \times T$ *(* $\partial \Omega$ *هي الحدودية الملساء لـ* Ω *)* :

$$u_i = q_i \qquad (1.8)$$

حيث الدوال $q_i : \partial \Omega \times T \rightarrow R$ معروفة.

- *الشروط الابتدائية* المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u_i = f_i \quad \text{و} \quad \dot{u}_i = g_i \qquad (1.9)$$

حيث f_i و g_i دوال معلومة في Ω .

قبل الدخول في مسألة لامي لجسم هوك ، يلزمنا التمهيد التالي حول استخراج معادلات لامي لجسم هوك.

استنتاج معادلات لامي لجسم هوك:

بتعويض العلاقات الهندسية (1.6) في العلاقات التأسيسية (1.7) ، نحصل على العلاقات التالية المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\sigma_{ji} = \mu \left(u_{i,j} + u_{j,i} \right) + \lambda \, u_{k,k} \, \delta_{ij}$$

وعندئذ ، بالاشتقاق بالنسبة إلى x_j ، ومن ثم باستخدام خاصة التصفية لدلتا كرونيكر ، نحصل على العلاقة الآتية المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\sigma_{ji,j} = \mu\,(u_{i,jj} + u_{j,ij}) + \lambda\, u_{k,kj}\,\delta_{ij}$$
$$= \mu\,(u_{i,jj} + u_{j,ji}) + \lambda\, u_{k,ki}$$

وبما أنه في قاعدتنا الديكارتية: $\nabla^2 u_i := div\,(\overrightarrow{grad}\, u_i) = u_{i,jj}$ ، وبما أنه أيضاً:

$u_{j,ji} = u_{k,ki}$ ، فتأخذ العلاقة السابقة الشكل التالي في $\Omega \times T^+$:

$$\sigma_{ji,j} = \mu\,\nabla^2 u_i + (\lambda + \mu)\, u_{j,ji}$$

نعوض في معادلات الحركة (1.4) ، فنحصل على معادلات لامي الآتية المحققة في

$$: \Omega \times T^+ \qquad \mu\,\nabla^2 u_i + (\lambda + \mu)\, u_{j,ji} + X_i = \rho\, \ddot{u}_i$$

وإذا وضعنا : $\overset{*}{\Box}_2 := \mu \nabla^2 - \rho\, \partial_t^2$ ، فتأخذ معادلات لامي السابقة الشكل المؤثري التفاضلي التحريكي الآتي في $\Omega \times T^+$:

$$\overset{*}{\Box}_2\, u_i + (\lambda + \mu)\, u_{j,ji} + X_i = 0$$

المسماة بمعادلات لامي بالشكل المؤثري التفاضلي التحريكي السلمي.

مسألة لامي لجسم هوك:

المطلوب إيجاد الحقول الفيزيائية $(\vec{u}\,,\,\underset{\sim}{\varepsilon}\,,\,\underset{\sim}{\sigma})$ في $\overline{\Omega} \times T$ ، التي هي من الشكل (1.1) ، (1.2) و (1.3) والمحققة لمعادلات الحقل والعلاقات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية:

- *معادلات لامي للحركة (الشكل المؤثري التفاضلي التحريكي السلمي) المحققة في $\Omega \times T^+$:*

$$\overset{*}{\Box}_2\, u_i + (\lambda + \mu)\, u_{j,ji} + X_i = 0 \qquad (1.10)$$

- *العلاقات الهندسية ، المحققة في $\Omega \times T^+$:*

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\,(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad (1.11)$$

- *العلاقات التي تعطي الإجهادات بدلالة الإزاحات ، المحققة في* $\Omega \times T^{+}$:

$$\sigma_{ji} = \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} \qquad (1.12)$$

- *الشروط الحدية المحققة على* $\partial\Omega \times T$:

$$u_i = q_i \qquad (1.13)$$

- *الشروط الابتدائية* والمحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$u_i = f_i \qquad \text{و} \qquad \dot{u}_i = g_i \qquad (1.14)$$

كيفية حل المسألة السابقة:

بحل مسألة القيم الحدية والابتدائية (1.10) و(1.13) و (1.14) ، نحصل على الإزاحات (displacment) المطلوبة u_i في $\Omega \times T$. نعوض في (1.11) و (1.12) ، فنحصل على الانفعالات(strain)المطلوبة ε_{ij} والإجهادات(stress)المطلوبة σ_{ji} في $\Omega \times T$.

ملاحظة: إلى مسألة لامي السابقة ، *لم تضاف شروط الاستمرار* (1.5) ، *لان التوابع* ε_{ij} بالشكل (1.11) تحول (1.5) إلى مطابقة في $\Omega \times T^{+}$. ومن أجل اللحظة الابتدائية $t = 0$ نفترض أن ε_{ij} تحقق شروط الاستمرار المذكورة ، وذلك بأن نفرض أنه في اللحظة $t = 0$ تكون ε_{ij} و $\dot{\varepsilon}_{ij}$ بالشكل التالي في Ω :

$$\varepsilon_{ij}^{0} = \frac{1}{2} (f_{i,j} + f_{j,i}) \qquad \text{و} \qquad \dot{\varepsilon}_{ij}^{0} = \frac{1}{2} (g_{i,j} + g_{j,i})$$

وبذلك تصبح شروط الاستمرار (1.5) محققة في كل $\Omega \times T$. وهذا يضمن لنا أن النموذج الرياضي (1.1)-(1.3) و (1.10) - (1.14) يمثل بالفعل جسم هوك موجوداً في الطبيعة.

شكل ديشليفتش المتجهي لمعادلات لامي من لجسم هوك:

استخدم ديشليفيتش تقنية المؤثرات التفاضلية التحريكية المتجهية ، معتمداً على الهندسة التفاضلية ، في كتابة مسألة لامي السابقة بالشكل المتجهي.لنضع: $\overset{*}{\vec{\Box}}_2 := \mu\, \vec{\nabla}^2 - \rho\, \partial_t^2$ ، عندئذٍ وبحسب المقدمة يكون:

$$\overrightarrow{grad}\,(div\,\vec{u}\,) = u_{j\,,\,j\,i}\ \vec{e}_i$$

$$\overset{*}{\vec{\Box}}_2\,\vec{u} = (\overset{*}{\Box}_2\, u_i\,)\ \vec{e}_i$$

وإذا ضربنا طرفي (1.10) بـ $\vec{e}_i$ ، من ثم بالاعتماد على العلاقتين المتجهيتين السابقتين نحصل على المعادلة التفاضلية المتجهية التالية في $T^+ \times \Omega$:

$$\overset{*}{\vec{\Box}}_2\,\vec{u} + (\lambda + \mu)\ \overrightarrow{grad}\ div\,\vec{u} + \vec{X} = \vec{0}$$

والتي هي معادلة لامي التفاضلية المتجهية بتقنية ديشليفيتش (تقنية المؤثرات التفاضلية المتجهية التحريكية).

في الفقرة القادمة سنرمز بـــ : $\underset{\sim}{\delta} \equiv \{\,\delta_{i\,j}\,\}_{3\times3}$ ، للتنسور المتري المعطى بدلالة مركباته في النظام الإحداثي القائم $[\,O\,,(\vec{e}_1\,,\vec{e}_2\,,\vec{e}_3)\,]$ ، وبـ $\underset{\sim}{U} \equiv \{\,u_{i,j}\,\}_{3\times3}$ و $\underset{\sim}{U}^T \equiv \{\,u_{i,j}\,\}^T_{3\times3}$ للتنسورين $\underset{\sim}{U}$ و $\underset{\sim}{U}^T$ ، والمعطيين بدلالة مصفوفتي مركبتيهما في النظام الإحداثي القائم المذكور، حيث $\{\,u_{i,j}\,\}^T_{3\times3}$ منقول المصفوفة $\{\,u_{i,j}\,\}_{3\times3}$. ولنرمز أخيراً بـ $U = u_{j\,,\,j}$ لتقلص التنسور $\underset{\sim}{U}$.

وفقاً لذلك تأخذ العلاقات الهندسية (1.11) والعلاقات (1.12) الشكل التنسوري الآتي في $T^+ \times \Omega$:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{2}\,(\,\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{U}^T\,)$$

$$\underset{\sim}{\sigma} = \mu\,(\,\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{U}^T\,) + \lambda\ U\ \underset{\sim}{\delta}$$

مسألة لامي بشكل ديشليفيتش لجسم هوك:

المطلوب إيجاد الحقول الفيزيائية $(\vec{u}\,,\,\underset{\sim}{\varepsilon}\,,\,\underset{\sim}{\sigma})$ في $\Omega \times T$ ، المحققة لمعادلة الحقل المتجهية وللعلاقات الأساسية (التنسورية) والشروط الحدية و الابتدائية المتجهية التالية:

معادلة لامي للحركة (الشكل المؤثري التفاضلي التحريكي المتجهي) المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\overset{*}{\vec{\square}}_2\,\vec{u} + (\lambda + \mu)\,\overrightarrow{grad}\; div\,\vec{u} + \vec{X} = \vec{0} \qquad (1.15)$$

- العلاقة الهندسية التنسورية ، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{2}\,(\,\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{U}^T\,) \qquad (1.16)$$

- العلاقة التنسورية التي تعطي تنسور الإجهاد بدلالة تنسور التدرجات الإزاحات $\underset{\sim}{U}$ ، والمحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \mu\,(\,\underset{\sim}{U} + \underset{\sim}{U}^T\,) + \lambda\; U\;\underset{\sim}{\delta} \qquad (1.17)$$

- الشرط الحدي ، المتجهي ، المحقق على $\partial\,\Omega \times T$:

$$\vec{u} = \vec{q} \qquad (1.18)$$

حيث: $\vec{q} = q_i\,\vec{e}_i$.

- الشرطان الابتدائيان المتجهيان ، المحققان في $\Omega \times \{0\}$:

$$\vec{u} = \vec{f} \qquad \text{و} \qquad \dot{\vec{u}} = \vec{g} \qquad (1.19)$$

حيث: $\vec{f} = f_i\,\vec{e}_i$ و $\vec{g} = g_i\,\vec{e}_i$.

نسمي مسألة القيم الحدية والابتدائية (1.15) و (1.18) و (1.19) بمسألة لامي للقيم الحدية والابتدائية بشكل ديشليفيتش لجسم هوك.
قبل الدخول في الفقرة القادمة ، سنقوم باستخراج المعادلات التفاضلية لكمونات نوفاتسكي المتعلّقة بجسم هوك.

استنتاج معادلات كمونات نوفاتسكي السلمية لجسم هوك:

لاستنتاج معادلات كمونات نوفاتسكي لجسم هوك اعتمد نوفاتسكي على مبرهنة ستوكس- هيلمهولتز في كتابة دالة الإزاحة ، المجهولة $\vec{u}$ و دالة القوة الحجمية ، المعلومة $\vec{X}$ في $\Omega \times T^+$ ، فارضاً أن:

$$\vec{u} = \overrightarrow{grad}\, \Phi + \overrightarrow{rot}\, \vec{\Psi}$$

$$\vec{X} = \rho\, (\overrightarrow{grad}\, \Sigma + \overrightarrow{rot}\, \vec{F})$$

حيث: $div\, \vec{\Psi} = 0$ و $div\, \vec{F} = 0$.

فإذا فرضنا أن: $\vec{\Psi} = \Psi_k\, \vec{e}_k$ و $\vec{F} = F_k\, \vec{e}_k$ ، فنحصل بعد إسقاط عبارتي ستوكس- هيلمهولتز المتجهيتين السابقتين على عبارتي ستوكس- هيلمهولتز السلميتين التاليتين في $\Omega \times T^+$:

$$u_i = \Phi_{,i} + e_{ijk}\, \Psi_{k,j} \qquad (1.20)$$

$$X_i = \rho\, (\Sigma_{,i} + e_{ijk}\, F_{k,j}) \qquad (1.21)$$

حيث: $\Psi_{k,k} = 0$ و $F_{k,k} = 0$.

باشتقاق طرفي العلاقة (1.20) بالنسبة لـ x_j ، نحصل على العلاقة التالية في $\Omega \times T^+$:

$$u_{j,j} = \nabla^2 \Phi + e_{jsk}\, \Psi_{k,sj}$$

وبما أن $e_{jsk}\, \Psi_{k,sj} = 0$ (لأنه لكل دليل k فإن $\Psi_{k,sj}$ حد عام لمصفوفة متناظرة بالنسبة للأدلة s و j) ، فنحصل على العلاقة التالية في $\Omega \times T^+$:

$$u_{j,j} = \nabla^2 \Phi$$

وبالتالي بالاشتقاق الجزئي بالنسبة لــ x_i ، نحصل العلاقة التالية في $\Omega \times T^+$:

$$u_{j,ji} = (\nabla^2 \Phi)_{,i} \qquad (1.22)$$

ومن جهة أخرى ، بتطبيق مؤثر لابلاس السلمي على طرفي العلاقة (1.20) نحصل على العلاقة التالية المحققة في $\Omega \times T^+$:

$\nabla^2 u_i = \nabla^2 (\Phi_{,i} + e_{ijk}\, \Psi_{k,j}) = (\nabla^2 \Phi)_{,i} + e_{ijk}\, (\nabla^2 \Psi_k)_{,j}$، وبالاشتقاق الجزئي مرتين بالنسبة للزمن t ، لطرفي العلاقة (1.20) ، نحصل أيضاً على العلاقة

التالية المحققة في $\Omega \times T^{+}$:

$$\ddot{u}_i = \ddot{\Phi}_{,i} + e_{ijk}\, \ddot{\Psi}_{k,j}$$

بالتالي ، تطبيق المؤثر التفاضلي التحريكي السلمي $\overset{*}{\square}_2$ على طرفي العلاقة (1.20) ، يعطينا العلاقة التالية المحققة في $\Omega \times T^{+}$:

$$\begin{aligned} \overset{*}{\square}_2 u_i &= \overset{*}{\square}_2 (\Phi_{,i} + e_{ijk}\, \Psi_{k,j}) = \\ &= (\overset{*}{\square}_2 \Phi)_{,i} + e_{ijk} (\overset{*}{\square}_2 \Psi_k)_{,j} \end{aligned} \qquad (1.23)$$

وبتعويض (1.22) و (1.23) في معادلات لامي (1.10) ، نحصل على المعادلة التالية المحققة في $\Omega \times T^{+}$:

$$\begin{aligned} (\overset{*}{\square}_2 \Phi)_{,i} + e_{ijk} (\overset{*}{\square}_2 \Psi_k)_{,j} + (\lambda + \mu) (\nabla^2 \Phi)_{,i} + \\ + \rho (\Sigma_{,i} + e_{ijk}\, F_{k,j}) = 0 \end{aligned}$$

أو

$$[\overset{*}{\square}_2 \Phi + (\lambda + \mu) \nabla^2 \Phi + \rho\, \Sigma]_{,i} + e_{ijk} (\overset{*}{\square}_2 \Psi_k + \rho\, F_k)_{,j} = 0$$

أو نحصل على العلاقة التالية المحققة في $\Omega \times T^{+}$:

$$(\square_1 \Phi + \rho\, \Sigma)_{,i} + e_{ijk} (\overset{*}{\square}_2 \Psi_k + \rho\, F_k)_{,j} = 0 \qquad (1.24)$$

حيث المؤثر التفاضلي التحريكي السلمي: $\square_1 := (\lambda + 2\mu)\, \nabla^2 - \rho\, \partial_t^2$.

لنلاحظ الآن الشئ التالي. تكون (1.24) محققة (وبالتالي معادلات لامي (1.10) محققة) ، إذا تحققت المعادلتان التفاضليتان السلميتان التاليتان في $\Omega \times T^{+}$:

$$\begin{aligned} \square_1 \Phi + \rho\, \Sigma &= 0 \\ \overset{*}{\square}_2 \Psi_k + \rho\, F_k &= 0 \end{aligned}$$

تسمى المعادلتان السابقتان بمعادلتي كمونات نوفاتسكي السلمية بتوابع الكمون السلمية

و Φ Ψ_k.

وقبل الدخول في مسألة كمونات نوفاتسكي لجسم هوك ، سنوجد في $\Omega \times T^+$ كلاً من الانفعالات و الإجهادات ، بدلالة كمونات نوفاتسكي Φ و Ψ_k.

بتعويض (1.20) في العلاقات الهندسية (1.11) ، نحصل على العلاقات الآتية المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\varepsilon_{ij} = \Phi_{,ij} + \frac{1}{2}\left(e_{isk}\,\Psi_{k,sj} + e_{jsk}\,\Psi_{k,si} \right)$$

أما بتعويض (1.20) في العلاقات (1.12) ، وبالاستفادة من خواص مناوب ليفي – تشيفيتي ، نحصل على العلاقات التالية المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\sigma_{ji} = \left(2\mu\, \Phi_{,ij} + \lambda\, \nabla^2 \Phi\, \delta_{ij} \right) + \mu\left(e_{isk}\,\Psi_{k,sj} + e_{jsk}\,\Psi_{k,si} \right)$$

مسألة كمونات نوفاتسكي لجسم هوك:

المطلوب إيجاد كمون نوفاتسكي السلمي Φ وكمون نوفاتسكي المتجهي $\vec{\Psi} = \Psi_i\, \vec{e}_i$ ، ومجموعة الحقول الفيزيائية $(u_i\ ,\ \varepsilon_{ij}\ ,\ \sigma_{ij})$ في $\overline{\Omega} \times T$ ، والمحققة لمعادلات الحقل السلمية والعلاقات الأساسية والشروط الحدية والابتدائية التالية:

- معادلات كمونات نوفاتسكي السلمية المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\Box_1 \Phi + \rho\, \Sigma = 0 \qquad (1.25)$$

$$\overset{*}{\Box}_2 \Psi_i + \rho\, F_i = 0 \qquad (1.26)$$

- علاقات ستوكس – هيلمهولتز السلمية ، في $\Omega \times T^+$:

$$u_i = \Phi_{,i} + e_{ijk}\,\Psi_{k,j} \qquad (1.27)$$

- علاقات الانفعالات بكمونات نوفاتسكي السلمية Φ و Ψ_k، والمحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\varepsilon_{ij} = \Phi_{,ij} + \frac{1}{2}\left(e_{isk}\,\Psi_{k,sj} + e_{jsk}\,\Psi_{k,si} \right) \qquad (1.28)$$

علاقات الإجهادات بكمونات نوفاتسكي السلمية Φ و Ψ_k*، والمحققة في* $\Omega \times T^+$:

$$\sigma_{ji} = (2\mu\ \Phi_{,ij} + \lambda\ \nabla^2 \Phi\ \delta_{ij}) + + \mu(\ e_{isk}\,\Psi_{k,sj} + \ e_{jsk}\,\Psi_{k,si}) \qquad (1.29)$$

- الشروط الحدية المحققة على $\partial\Omega \times T$:

$$\Phi_{,i} + e_{ijk}\,\Psi_{k,j} = q_i \qquad (1.30)$$

- الشروط الابتدائية والمحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$\Phi_{,i} + e_{ijk}\,\Psi_{k,j} = f_i \quad \text{و} \quad \dot{\Phi}_{,i} + e_{ijk}\,\dot{\Psi}_{k,j} = g_i \qquad (1.31)$$

ألية حل مسألة كمونات نوفاتسكي:

بحل مسألة القيم الحدية و الابتدائية (1.25) و (1.26) و (1.30) و (1.31) ، نحصل *على كمونات نوفاتسكي المطلوبة* Φ و Ψ_k في $\overline{\Omega} \times T$. نعوض في كلٍ من (1.27) و (1.28) و (1.29) ، فنحصل على كلٍ من الإزاحات u_i والانفعالات ε_{ij} و الإجهادات σ_{ij} في $\Omega \times T^+$.

ملاحظة: نسمي مسألة القيم الحدية والابتدائية (1.25) و (1.26) و (1.30) و (1.31) *بمسألة كمونات نوفاتسكي الحدية والابتدائية بالشكل السلمي.*

معادلات كمونات نوفاتسكي السلمية - المتجهية بالشكل التفاضلي التحريكي السلمي:

بضرب طرفي المعادلة (1.26) بـ $\vec{e}_i$ ، ولما كانت متجهات القاعدة المذكورة هي متجهات ثابتة ، فنحصل على المعادلة التالية المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\overset{*}{\square}_2 \vec{\Psi} + \rho\,\vec{F} = \vec{0}$$

نسمي المعادلتين التاليتين المحققتين في $\Omega \times T^+$:

$$\square_1 \Phi + \rho\,\Sigma = 0$$

$$\overset{*}{\square}_2 \vec{\Psi} + \rho\,\vec{F} = \vec{0}$$

بمعادلتي كمونات نوفاتسكي السلمية - المتجهية ، بالشكل المؤثري التفاضلي التحريكي السلمي.

قبل الدخول في الفقرة القادمة ، سنوجد معادلات كمونات نوفاتسكي السلمية – المتجهية بشكل ديشليفيتش.يمكن الوصول لذلك بطريقتين.سنذكر فقط إحدى الطريقتين.لهذا الغرض نفرض أن دالة الإزاحة المجهولة $\vec{u}$ ودالة القوة الحجمية ، المعلومة $\vec{X}$ تكتبان في $\Omega \times T^{+}$ بالشكل:

$$\vec{u} = \overrightarrow{grad}\ \Phi + \overrightarrow{rot}\ \vec{\Psi}$$

$$\vec{X} = \rho\,(\overrightarrow{grad}\ \Sigma + \overrightarrow{rot}\ \vec{F}\,)$$

حيث: $div\ \vec{\Psi} = 0$ و $div\ \vec{F} = 0$.

فبتعويض العلاقتين السابقتين في معادلة لامي المتجهية (شكل ديشليفيتش) ، وباستخدام بعض الخواص المذكورة في المقدمة ،نحصل على المعادلة المتجهية التالية المحققة في $\Omega \times T^{+}$:

$$\overrightarrow{grad}\ (\square_1 \Phi + \rho\,\Sigma\,) + \overrightarrow{rot}\ (\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\,\vec{\Psi} + \rho\,\vec{F}\,) = \vec{0}$$

ولنلاحظ الآن أن المعادلة السابقة تكون محققة، وبالتالي معادلة لامي المتجهية (1.15) تكون محققة في $\Omega \times T^{+}$ ، إذا تحققت المعادلتان التاليتان في $\Omega \times T^{+}$:

$$\square_1 \Phi + \rho\,\Sigma = 0$$

$$\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\,\vec{\Psi} + \rho\,\vec{F} = \vec{0}$$

ندعو المعادلتين السابقتين بمعادلتي كمونات نوفاتسكي السلمية–المتجهية وبتقنية ديشليفيتش.

مسألة كمونات نوفاتسكي السلمية – المتجهية ، الحدية والابتدائية ، بالشكل التفاضلي التحريكي السلمي – المتجهي :

المطلوب إيجاد دالة كمون نوفاتسكي السلمية Φ والمتجهية $\vec{\Psi}$ في $\overline{\Omega} \times T$ ، المحققتين للمعادلات و الشروط الحدية والابتدائية التالية:

معادلات كمونات نوفاتسكي السلمية – المتجهية ، بتقنية ديشليفيتش في $\Omega \times T^{+}$:

$$\square_1 \Phi + \rho\,\Sigma = 0 \qquad (1.32)$$

$$\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\,\vec{\Psi} + \rho\,\vec{F} = \vec{0} \qquad (1.33)$$

الشرط الحدي ، المتجهي ، المحقق على $\partial\Omega \times T$:

$$\overrightarrow{grad}\,\Phi + \overrightarrow{rot}\,\vec{\Psi} = \vec{q} \qquad (1.34)$$

الشرطان الابتدائيان المتجهيان ، المحققان في $\Omega \times \{0\}$:

$$\overrightarrow{grad}\,\Phi + \overrightarrow{rot}\,\vec{\Psi} = \vec{f} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{grad}\,\dot{\Phi} + \overrightarrow{rot}\,\dot{\vec{\Psi}} = \vec{g} \qquad (1.35)$$

لنلاحظ أن مسألة جسم هوك تؤول إلى حساب كمونات نوفاتسكي : السلمي Φ

و المتجهي $\vec{\Psi}$ ، المحققين للمسألة السابقة (1.32) - (1.35).

في الفقرة القادمة (معادلات كمونات نوفاتسكي السلمية وفقاً لتقنية إغناتشاك) ، اعتمد إغناتشاك على النتيجة التالية من مبرهنة ستوكس – هيلمهولتز.

نتيجة (من مبرهنة ستوكس - هيلمهولتز):

إذا كانت τ منطقة وحيدة الترابط في الفضاء الاقليدي ثلاثي البعد $\boldsymbol{R}^3$ ، و $\vec{f}:\tau \to \boldsymbol{R}^3$ دالة متجهية من الصف C^1 في τ ، عندئذ توجد دالتان متجهيتان $\vec{f}_{(p)}, \vec{f}_{(r)}:\tau \to \boldsymbol{R}^3$ من الصف C^1 في τ ، بحيث يكون: $\vec{f} = \vec{f}_{(p)} + \vec{f}_{(r)}$

(وبحيث يكون: $\overrightarrow{rot}\,\vec{f}_{(p)} = \vec{0}$ و $div\,\vec{f}_{(r)} = 0$).

نسمي $\vec{f}_{(p)}$ بالجزء الكموني للدالة المتجهية $\vec{f}$ ، كما ندعو $\vec{f}_{(r)}$ بالجزء الدوار للدالة المتجهية $\vec{f}$. وإذا كان $\vec{f}_{(r)} = \vec{0}$ ، فنقول أن الدالة المتجهية $\vec{f}$ كمونية ، أما إذا كان $\vec{f}_{(p)} = \vec{0}$ ، فنقول أن الدالة المتجهية $\vec{f}$ دوَّارة.

الشكل السلمي للنتيجة السابقة:

لنفرض أن $\vec{f} \equiv f_i\,\vec{e}_i$ و $\vec{f}_{(p)} \equiv f_{(p)_i}\,\vec{e}_i$ و $\vec{f}_{(r)} \equiv f_{(r)_i}\,\vec{e}_i$. وجدنا سابقاً أن:

$$div\,\vec{f}_{(r)} = f_{(r)_{k,k}} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{rot}\,\vec{f}_{(p)} = e_{ijk}\,\frac{\partial f_{(p)_k}}{\partial x_j}\,\vec{e}_i = e_{ijk}\,f_{(p)_{k,j}}\,\vec{e}_i \,.$$

بإسقاط صيغة ستوكس– هيلمهولتز المتجهية الموجودة في النتيجة السابقة ، على $\vec{e}_i$ ،

نحصل على العلاقات السلمية : $f_i = f_{(p)_i} + f_{(r)_i}$

(حيث: $f_{(r)_{k,k}} = 0$ و $e_{ijk}\ f_{(p)_{k,j}} = 0$).

نتيجة: ينتج عن تطبيق الجمع الدليلي في العلاقة : $e_{ijk}\ f_{(p)_{k,j}} = 0$ ، أن:

$f_{(p)_{j,k}} = f_{(p)_{k,j}}$ ، أي أن مصفوفة التوابع $\{ f_{(p)_{j,k}} \}_{3\times 3}$ متناظرة.

استنتاج معادلات كمونات نوفاتسكي السلمية وفقاً لتقنية إغناتشاك:

فرض إغناتشك في معادلات لامي السلمية (الشكل المؤثري التفاضلي التحريكي السلمي) أن كلاً من الحقل المجهول $\vec{u}$ ودالة القوة الحجمية ، المعلومة $\vec{X}$ تكتب وفقاً للنتيجة السابقة بالشكل التالي في $\Omega \times T^+$:

$$\vec{X} = \vec{X}_{(p)} + \vec{X}_{(r)} \quad \text{و} \quad \vec{u} = \vec{u}_{(p)} + \vec{u}_{(r)}$$

$\overrightarrow{rot}\ \vec{u}_{(p)} = \vec{0}$ و $\overrightarrow{rot}\ \vec{X}_{(p)} = \vec{0}$ و $div\ \vec{u}_{(r)} = 0$ و $div\ \vec{X}_{(r)} = 0$.

والتي تأخذ الشكل السلمي التالي في $\Omega \times T^+$:

$$X_i = X_{(p)_i} + X_{(r)_i} \quad \text{و} \quad u_i = u_{(p)_i} + u_{(r)_i}$$

حيث: $u_{(r)_{k,k}} = 0$ و $X_{(r)_{k,k}} = 0$

و $e_{ijk}\ u_{(p)_{k,j}} = 0$ (أو: $u_{(p)_{j,k}} = u_{(p)_{k,j}}$ أو)

و $e_{ijk}\ X_{(p)_{k,j}} = 0$ (أو: $X_{(p)_{j,k}} = X_{(p)_{k,j}}$)

والتي نحصل منها على العلاقة التالية المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$u_{j,j} = u_{(p)_{j,j}}$$

وبالتالي باشتقاق الطرفين جزئياً بالنسبة لـ x_i نحصل على العلاقة التالية المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$u_{j,ji} = u_{(p)_{j,ji}}$$

وبما أنه ، في $\Omega \times T^+$ ، يكون:

$$u_{(p)_{j,ji}} = u_{(p)_{i,jj}} = \nabla^2 u_{(p)_i}$$

فإننا نحصل على العلاقة التالية المحققة في $\Omega \times T^{+}$:

$$u_{j,ji} = \nabla^2 u_{(p)_i}$$

كما أن تطبيق المؤثر السلمي على طرفي علاقات ستوكس – هيلمهولتز (تقنية إغناتشاك) ، يعطينا العلاقات التالية المحققة في $\Omega \times T^{+}$:

$$\overset{*}{\square}_2 u_i = \overset{*}{\square}_2 u_{(p)_i} + \overset{*}{\square}_2 u_{(r)_i}$$

وبتعويض ما سبق في معادلات لامي السلمية (1.10) ، نحصل على المعادلات السلمية التالية المحققة في $\Omega \times T^{+}$:

$$\overset{*}{\square}_2 u_{(p)_i} + (\lambda + \mu)\,\nabla^2 u_{(p)_i} + X_{(p)_i} + \\ + \overset{*}{\square}_2 u_{(r)_i} + X_{(r)_i} = 0$$

أو

$$\square_1 u_{(p)_i} + X_{(p)_i} + \overset{*}{\square}_2 u_{(r)_i} + X_{(r)_i} = 0$$

ولنلاحظ أن المعادلة السابقة تكون محققة وبالتالي تكون معادلات لامي السلمية محققة في $\Omega \times T^{+}$ ، إذا تحققت المعادلتان السلميتان التاليتان في $\Omega \times T^{+}$:

$$\square_1 u_{(p)_i} + X_{(p)_i} = 0$$

$$\overset{*}{\square}_2 u_{(r)_i} + X_{(r)_i} = 0$$

نسمي المعادلتين السابقتين بمعادلتي كمونات نوفاتسكي السلمية وبتقنية إغناتشاك ، في $\Omega \times T^{+}$.

قبل الدخول في الفقرة القادمة (مسألة كمونات نوفاتسكي السلمية بتقنية إغناتشك لجسم هوك) ، يلزمنا إيجاد كلٍ من الانفعالات والإجهادات بدلالة مركبات الجزء الكموني و الجزء الدوَّار لدالة الإزاحة.

بتعويض علاقات ستوكس– هيلمهولتز السلمية (تقنية إغناتشاك) في العلاقات الهندسية (1.11) ، من ثم بالاستفادة من تناظر مصفوفة التوابع $\{u_{(p)_{j,k}}\}_{3\times3}$ ، نحصل على العلاقات التالية المحققة في $\Omega \times T^{+}$:

$$\varepsilon_{ij} = u_{(p)_{i,j}} + \frac{1}{2}\left[u_{(r)_{i,j}} + u_{(r)_{j,i}} \right]$$

أما تعويض علاقات ستوكس – هيلمهولتز السلمية (تقنية إغناتشاك) ، في العلاقات (1.12) ، فإننا نحصل على العلاقات التالية المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\sigma_{ji} = 2\mu\, u_{(p)_{i,j}} + \lambda\, u_{(p)_{k,k}} \delta_{ij} + \mu\left[u_{(r)_{i,j}} + u_{(r)_{j,i}} \right]$$

مسألة كمونات نوفاتسكي السلمية بتقنية إغناتشاك لجسم هوك:

المطلوب إيجاد الحقول الكمونية السلمية $u_{(p)_i}$ و $u_{(r)_i}$ ومجموعة الحقول الفيزيائية $(u_i\ ,\ \varepsilon_{ij}\ ,\ \sigma_{ij})$ في $\overline{\Omega} \times T$ ، المحققة للمعادلات و العلاقات الأساسية و الشروط الحدية و الابتدائية التالية:

- *معادلات كمونات نوفاتسكي السلمية بتقنية إغناتشاك ، المحققة في $\Omega \times T^+$:*

$$\square_1 u_{(p)_i} + X_{(p)_i} = 0 \qquad (1.36)$$

$$\overset{*}{\square}_2 u_{(r)_i} + X_{(r)_i} = 0 \qquad (1.37)$$

-علاقات ستوكس-هيلمهولتز السلمية (بتقنية إغناتشاك) ، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$u_i = u_{(p)_i} + u_{(r)_i} \qquad (1.38)$$

حيث: $u_{(r)_{k,k}} = 0$ و $[\ e_{ijk}\, u_{(p)_{k,j}} = 0$ (أو: $(u_{(p)_{j,k}} = u_{(p)_{k,j}})\ ]$

- العلاقات التي تعطينا الانفعالات بدلالة الكمونات السلمية المذكورة ، في $\Omega \times T^+$:

$$\varepsilon_{ij} = u_{(p)_{i,j}} + \frac{1}{2}\left[u_{(r)_{i,j}} + u_{(r)_{j,i}} \right] \qquad (1.39)$$

- العلاقات التي تعطينا الإجهادات بدلالة الكمونات السلمية ، في $\Omega \times T^+$:

$$\sigma_{ji} = 2\mu\, u_{(p)_{i,j}} + \lambda\, u_{(p)_{k,k}} \delta_{ij} + \mu\left[u_{(r)_{i,j}} + u_{(r)_{j,i}} \right] \qquad (1.40)$$

- *الشروط الحدية المحققة على* $\partial\Omega \times T$ *:*

$$u_{(p)_i} + u_{(r)_i} = q_i \qquad (1.41)$$

- *الشروط الابتدائية* والمحققة في $\Omega \times \{0\}$ *:*

$$u_{(p)_i} + u_{(r)_i} = f_i \quad و \quad \dot{u}_{(p)_i} + \dot{u}_{(r)_i} = g_i \qquad (1.42)$$

آلية حل مسألة كمونات نوفاتسكي السلمية بتقنية إغناتشاك لجسم هوك:

بحل مسألة القيم الحدية والابتدائية (1.36) و (1.37) و (1.41) و (1.42) ، نحصل على كمونات نوفاتسكي (تقنية إغناتشك): $u_{(p)_i}$ و $u_{(r)_i}$ في $\overline{\Omega} \times T$.نعوض في العلاقات (1.38) و(1.39) و(1.40) ، فنحصل على الإزاحات والانفعالات و الإجهادات في $\Omega \times T^+$.

ملاحظة: نسمي مسألة القيم الحدية والابتدائية (1.36) و (1.37) و (1.41) و (1.42) ، بمسألة القيم الحدية والابتدائية لجسم هوك ، بكمونات نوفاتسكي السلمية وتقنية إغناتشاك.

معادلات كمونات نوفاتسكي المتجهية بتقنية إغناتشاك:

للحصول على هذه المعادلات في $\Omega \times T^+$ ، نضرب طرفي المعادلات السلمية (1.36) و(1.37) بمتجه القاعدة $\vec{e}_i$ ، مع الأخذ بعين الاعتبار أن متجهات القاعدة المذكورة هي متجهات ثابتة ، فنحصل على المعادلتين المتجهيتين التاليتين المحققتين في $\Omega \times T^+$:

$$\square_1 \vec{u}_{(p)} + \vec{X}_{(p)} = \vec{0} \qquad (1.43)$$

$$\overset{*}{\square}_2 \vec{u}_{(r)} + \vec{X}_{(r)} = \vec{0} \qquad (1.44)$$

نسمي هاتين المعادلتين بمعادلتي كمونات نوفاتسكي ، المتجهيتين لجسم هوك في $\Omega \times T^+$ ، وبتقنية إغناتشاك.

في البحث [11] ، تمت مناقشة طريقة كمونات نوفاتسكي المتجهية (شكل إغناتشاك) بتقنية ديشليفيتش (تقنية المؤثرات التفاضلية التحريكية المتجهية) . ومن أجل متطلبات الأطروحة يلزمنا عرض هذه المناقشة . ولهذا الغرض سنستعرض في الفقرة القادمة

طريقة الحصول على معادلات كمونات نوفاتسكي ، المتجهية (شكل إغناتشك – ديشليفيتش).

معادلات كمونات نوفاتسكي ، المتجهية بشكل إغناتشاك – ديشليفيتش:

من أجل استنتاج هذه المعادلات تم في [11] ، افتراض أن دالة الإزاحة المجهولة $\vec{u}$ ودالة القوة الحجمية المعلومة $\vec{X}$ ، تكتبان بالشكل التالي في $\Omega \times T^{+}$:

$$\vec{u} = \vec{u}_{(p)} + \vec{u}_{(r)} \quad \text{و} \quad \vec{X} = \vec{X}_{(p)} + \vec{X}_{(r)}$$

حيث: $\overrightarrow{rot}\ \vec{u}_{(p)} = \vec{0}$ و $\overrightarrow{rot}\ \vec{X}_{(p)} = \vec{0}$

و $div\ \vec{u}_{(r)} = 0$ و $div\ \vec{X}_{(r)} = 0$.

وينتج عن ذلك ، تحقق العلاقة المتجهية التالية في $\Omega \times T^{+}$:

$$\vec{\nabla}^2\ \vec{u}_{(p)} := \overrightarrow{grad}\ [\ div\ \vec{u}_{(p)}\ ] - \overrightarrow{rot}\ [\ \overrightarrow{rot}\ \vec{u}_{(p)}\ ] = \overrightarrow{grad}\ [\ div\ \vec{u}_{(p)}\ ]$$

بتعويض المعطيات السابقة في معادلة لامي المتجهية (شكل ديشليفيتش) (1.15) ،

وبالاستفادة من بعض الخواص من المقدمة نحصل على العلاقة التالية المحققة في

$\Omega \times T^{+}$:

$$\overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\ \vec{u}_{(p)} + (\lambda + \mu)\ \vec{\nabla}^2\ \vec{u}_{(p)} + \vec{X}_{(p)} + \\ + \overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\ \vec{u}_{(r)} + \vec{X}_{(r)} = \vec{0}$$

أو :

$$\overrightarrow{\square}_1\ \vec{u}_{(p)} + \vec{X}_{(p)} + \overset{*}{\overrightarrow{\square}}_2\ \vec{u}_{(r)} + \vec{X}_{(r)} = \vec{0}$$

حيث: $\overrightarrow{\square}_1 := (\lambda + 2\mu)\ \vec{\nabla}^2 - \rho\ \partial_t^2$.

لنلاحظ أن المعادلة السابقة تكون محققة وبالتالي معادلة لامي المتجهية (1.15) تكون محققة في $\Omega \times T^{+}$ ، إذا تحققت المعادلتان المتجهيتان التاليتان في $\Omega \times T^{+}$:

$$\vec{\Box}_1 \vec{u}_{(p)} + \vec{X}_{(p)} = \vec{0}$$

$$\overset{*}{\vec{\Box}}_2 \vec{u}_{(r)} + \vec{X}_{(r)} = \vec{0}$$

نسمي المعادلتين المتجهيتين السابقتين بمعادلتي كمونات نوفاتسكي ، المتجهيتين لجسم هوك في $\Omega \times T^+$ ، و بتقنية إغناتشاك – ديشليفيتش.

مسألة القيم الحدية والابتدائية لجسم هوك ، بكمونات نوفاتسكي (تقنية إغناتشاك – ديشليفيتش):

المطلوب إيجاد الجزأين: الكموني $\vec{u}_{(p)}$ ، والدوَّار $\vec{u}_{(r)}$ لدالة الإزاحة المجهولة $\vec{u}$ ، المحققين للمعادلات المتجهية والشروط الحدية والابتدائية الآتية في $\overline{\Omega} \times T$:

- معادلات كمونات نوفاتسكي، المتجهية (تقنية إغناتشاك – ديشليفيتش) في $\Omega \times T^+$:

$$\vec{\Box}_1 \vec{u}_{(p)} + \vec{X}_{(p)} = \vec{0} \qquad (1.45)$$

$$\overset{*}{\vec{\Box}}_2 \vec{u}_{(r)} + \vec{X}_{(r)} = \vec{0} \qquad (1.46)$$

- الشرط الحدي ، المتجهي ، المحقق على $\partial\Omega \times T$:

$$\vec{u}_{(p)} + \vec{u}_{(r)} = \vec{q} \qquad (1.47)$$

- الشرطان الابتدائيان المتجهيان ، المحققان في $\Omega \times \{0\}$:

$$\vec{u}_{(p)} + \vec{u}_{(r)} = \vec{f} \quad \text{و} \quad \dot{\vec{u}}_{(p)} + \dot{\vec{u}}_{(r)} = \vec{g} \qquad (1.48)$$

ملاحظة هامة:

في جميع الأنواع المذكورة لمسائل القيم الحدية والابتدائية بكمونات نوفاتسكي،لجسم هوك يلزمنا الأمران الآتيان:

الأمر الأول: حساب دالتي الكمون المتعلقتين بدالة القوة الحجمية (دالة القوة الحجمية معطاة).

الأمر الثاني: إمكانية تجزئة مسألة القيم الابتدائية بكمونات نوفاتسكي إلى مسألتي قيم ابتدائية مستقلتين مما يسهِّل الحل.

في البحث [11] تم حل المعضلتين السابقتين. فيما يأتي سنذكر وبشكل مفصل نتائج البحث، فيما يتعلق بحل المشكلتين السابقتين.

أولاً : حساب الجزء الكموني والجزء الدوار لدالة القوى الحجمية ، المعلومة $\vec{X}$:

حُلت هذه المشكلة بافتراض أن دالة القوى الحجمية المعلومة $\vec{X}$ تكتب وفقاً لمبرهنة ستوكس – هيمهولتز (تقنية إغناتشاك) ، بالشكل التالي في $\Omega \times T^{+}$:

$\vec{X} = \vec{X}_{(p)} + \vec{X}_{(r)}$ (حيث: $\overrightarrow{rot}\ \vec{X}_{(p)} = \vec{0}$ و $div\ \vec{X}_{(r)} = 0$).

وإذا أخذنا تفرق ودوران طرفي العلاقة السابقة ، نحصل على العلاقتين التاليتين المحققتين في $\Omega \times T^{+}$:

$$div\ \vec{X}_{(p)} = div\ \vec{X}$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{X}_{(r)} = \overrightarrow{rot}\ \vec{X}$$

وإذا أخذنا التدرج للعلاقة الأولى و الدوران للعلاقة الثانية ، نحصل على العلاقتين التاليتين المحققتين في $\Omega \times T^{+}$:

$$\overrightarrow{grad}\ [\ div\ \vec{X}_{(p)}\ ] = \overrightarrow{grad}\ (\ div\ \vec{X}\ )$$

$$\overrightarrow{rot}\ [\ \overrightarrow{rot}\ \vec{X}_{(r)}\ ] = \overrightarrow{rot}\ (\ \overrightarrow{rot}\ \vec{X}\ )$$

ولما كان دوران الجزء الكموني معدوماً ، وتفرق الجزء الدوار معدوماً ، فلا بد أن تتحقق العلاقتان التاليتان في $\Omega \times T^{+}$:

$$\vec{\nabla}^2\ \vec{X}_{(p)} := \overrightarrow{grad}\ [\ div\ \vec{X}_{(p)}\ ] - \overrightarrow{rot}\ [\ \overrightarrow{rot}\ \vec{X}_{(p)}\ ] = \overrightarrow{grad}\ [\ div\ \vec{X}_{(p)}\ ]$$

$$\vec{\nabla}^2\ \vec{X}_{(r)} := \overrightarrow{grad}\ [\ div\ \vec{X}_{(r)}\ ] - \overrightarrow{rot}\ [\ \overrightarrow{rot}\ \vec{X}_{(r)}\ ] = -\ \overrightarrow{rot}\ [\ \overrightarrow{rot}\ \vec{X}_{(r)}\ ]$$

وبمقارنة العلاقتين السابقتين مع العلاقتين الأسبق ، نحصل على المعادلتين المتجهيتين التاليتين ، المحققتين في $\Omega \times T^{+}$:

$$\vec{\nabla}^2\ \vec{X}_{(p)} = \overrightarrow{grad}\ (\ div\ \vec{X}\ ) \qquad (1.49)$$

$$\vec{\nabla}^2\ \vec{X}_{(r)} = -\ \overrightarrow{rot}\ (\ \overrightarrow{rot}\ \vec{X}\ ) \qquad (1.50)$$

وهما معادلتان تفاضليتان، متجهيتان ومستقلتان بالتابعين المجهولين: $\vec{X}_{(p)}$ و $\vec{X}_{(r)}$، بحلهما نحصل على الجزء الكموني $\vec{X}_{(p)}$ و الجزء الدوار $\vec{X}_{(r)}$ لـ $\vec{X}$ في $\Omega \times T^{+}$.

سندعو (1.49) و (1.50) بالمعادلتين التفاضليتين المتجهيتين، المساعدتين ،المتعلّقتين بالجزأين الكموني والدوار لدالة القوة الحجمية في $\Omega \times T^{+}$.

ثانياً : فصل مسألة القيم الإبتدائية بكمونات نوفاتسكي (تقنية إغناتشاك – ديشليفيتش) إلى مسألتي قيم ابتدائية من النوع نفسه:

تم حل هذه المشكلة بافتراض أن دالة القيم الابتدائية لدالة الإزاحة ودالة القيم الابتدائية للمشتق الجزئي الزمني لدالة الإزاحة ، أي الدالتين المتجهيتين المعلومتين $\vec{f}$ و $\vec{g}$ ، تكتبان وفقاً لمبرهنة ستوكس – هيلمهولتز (تقنية إغناتشاك) ، بالشكل التالي في Ω :

$$\vec{f} = \vec{f}_{(p)} + \vec{f}_{(r)} \quad (\text{حيث: } \overrightarrow{rot}\ \vec{f}_{(p)} = \vec{0} \ \text{ و } \ div\ \vec{f}_{(r)} = 0).$$

$$\vec{g} = \vec{g}_{(p)} + \vec{g}_{(r)} \quad (\text{حيث: } \overrightarrow{rot}\ \vec{g}_{(p)} = \vec{0} \ \text{ و } \ div\ \vec{g}_{(r)} = 0).$$

وبطريقة مشابهة للطريقة المتبعة في الفقرة السابقة ، نجد أن التوابع المجهولة $\vec{f}_{(p)}$ و $\vec{f}_{(r)}$ و $\vec{g}_{(p)}$ و $\vec{g}_{(r)}$ تحقق معادلات بواصون التفاضلية المتجهية المستقلة و المساعدة الآتية في Ω:

$$\vec{\nabla}^2\ \vec{f}_{(p)} = \overrightarrow{grad}\ (\ div\ \vec{f}\ ) \qquad (1.51)$$

$$\vec{\nabla}^2\ \vec{g}_{(p)} = \overrightarrow{grad}\ (\ div\ \vec{g}\ ) \qquad (1.52)$$

$$\vec{\nabla}^2\ \vec{f}_{(r)} = -\ \overrightarrow{rot}\ (\ \overrightarrow{rot}\ \vec{f}\ ) \qquad (1.53)$$

$$\vec{\nabla}^2\ \vec{g}_{(r)} = -\ \overrightarrow{rot}\ (\ \overrightarrow{rot}\ \vec{g}\ ) \qquad (1.54)$$

نسمي المعادلات (1.51) - (1.54) ، بالمعادلات التفاضلية المتجهية ، المستقلة ، والمساعدة في Ω ، والمتعلقة بالجزأين الكموني والدوار للدالة المعلومة $\vec{f}$ والجزأين الكموني والدوار للدالة المعلومة $\vec{g}$.

في الفقرة القادمة ، سنعرض مسألة القيم الحدية والابتدائية لجسم هوك ، بكمونات نوفاتسكي، المتجهية (تقنية إغناتشاك – ديشليفيتش) ، بعد إضافة حل المعضلتين السابقتين.

الشكل المكمَّل لمسألة القيم الحدية والابتدائية لجسم هوك، بكمونات نوفاتسكي، المتجهية (تقنية إغناتشاك – ديشليفيتش) ([11]) :

المطلوب إيجاد الجزأين: الكموني $\vec{u}_{(p)}$ ، والدوَّار $\vec{u}_{(r)}$ لدالة الإزاحة المجهولة $\vec{u}$ ، المحققين للمعادلات المتجهية والشروط الحدية والابتدائية التالية في $\overline{\Omega} \times T$:

- معادلات كمونات نوفاتسكي، المتجهية (تقنية إغناتشاك – ديشليفيتش) في $\Omega \times T^{+}$:

$$\vec{\Box}_1 \, \vec{u}_{(p)} + \vec{X}_{(p)} = \vec{0} \qquad (1.55)$$

$$\overset{*}{\vec{\Box}}_2 \, \vec{u}_{(r)} + \vec{X}_{(r)} = \vec{0} \qquad (1.56)$$

- الشرط الحدي ، المتجهي ، المحقق على $\partial\Omega \times T$:

$$\vec{u}_{(p)} + \vec{u}_{(r)} = \vec{q} \qquad (1.57)$$

- الشروط الابتدائية المتجهية ، المحققة في $\Omega \times \{0\}$:

$$\vec{u}_{(r)} = \vec{f}_{(r)} \quad \text{و} \quad \vec{u}_{(p)} = \vec{f}_{(p)} \qquad (1.58)$$

$$\dot{\vec{u}}_{(r)} = \vec{g}_{(r)} \quad \text{و} \quad \dot{\vec{u}}_{(p)} = \vec{g}_{(p)} \qquad (1.59)$$

حيث الدوال المتجهية المجهولة $\vec{X}_{(p)}$ و $\vec{X}_{(r)}$ تحقق المعادلتين التفاضليتين المتجهيتين والمستقلتين ، والمساعدتين الآتيتين في $\Omega \times T^{+}$:

$$\vec{\nabla}^2 \, \vec{X}_{(p)} = \overrightarrow{grad} \, (\, div \, \vec{X} \,) \qquad (1.60)$$

$$\vec{\nabla}^2 \, \vec{X}_{(r)} = - \overrightarrow{rot} \, (\, \overrightarrow{rot} \, \vec{X} \,) \qquad (1.61)$$

أما الدوال المتجهية المجهولة $\vec{f}_{(p)}$ و $\vec{f}_{(r)}$ و $\vec{g}_{(p)}$ و $\vec{g}_{(r)}$ فهي تحقق المعادلات التفاضلية المتجهية والمستقلة ، والمساعدة الآتية في Ω:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{f}_{(p)} = \overrightarrow{grad}\ (\ div\ \vec{f}\ ) \qquad (1.62)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{g}_{(p)} = \overrightarrow{grad}\ (\ div\ \vec{g}\ ) \qquad (1.63)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{f}_{(r)} = -\ \overrightarrow{rot}\ (\ \overrightarrow{rot}\ \vec{f}\ ) \qquad (1.64)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{g}_{(r)} = -\ \overrightarrow{rot}\ (\ \overrightarrow{rot}\ \vec{g}\ ) \qquad (1.65)$$

الفصل الثاني

تحويل المعادلات التفاضلية الجزئية لجسم هوك المرن إلى معادلات تكاملية على سطح كرة

في بداية هذا الفصل سنعرض للضرورة وبالتفصيل نتائج البحث [11] ، المتعلقة باستخدام التحويلات الحجمية - السطحية لنقل المسألة (1.55) - (1.65) لجسم هوك المرن إلى مسألة جملة معادلات تكاملية على سطح كرة مركزها O (مبدأ الجملة الإحداثية) ونصف قطرها a ، ويشغلها جسم هوك المرن في اللحظة الابتدائية $t=0$. قبل ذلك يلزمنا التعريف الآتي:

تعريف:

إذا كان C عدداً حقيقياً أوعقدياً، فإننا نسمي المؤثر التفاضلي السلمي: $\Box_C^2 := \nabla^2 + C^2$ بمؤثر هيلمهولتز التفاضلي السلمي ، وإذا كانت f دالة سلمية معلومة وتتبع لمتحولات الموضع: $\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ ، فإننا نسمي المعادلة التفاضلية السلمية: $\Box_C^2\, u = f$ بمعادلة هيلمهولز التفاضلية السلمية (المتجانسة إذا كان $f \equiv 0$ وغير المتجانسة إذا كان $f \neq 0$).كما نسمي المؤثر التفاضلي المتجهي: $\vec{\Box}_C^2 := \vec{\nabla}^2 + C^2$ ، بمؤثر هيلمهولتز التفاضلي المتجهي ، وإذا كانت $\vec{f}$ دالة متجهية معلومة وتتبع أيضاً للمتحولات $\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ فإننا نسمي المعادلة التفاضلية المتجهية $\vec{\Box}_C^2\, \vec{u} = \vec{f}$ ، بمعادلة هيلمهولتز التفاضلية المتجهية (المتجانسة إذا كان $\vec{f} \equiv \vec{0}$ وغير المتجانسة إذا كان $\vec{f} \neq \vec{0}$).

في البحث [11] تم الحصول على المعادلات التكاملية المذكورة كما يلي:

أولاً : تحويل مسألة التحريك بكمونات نوفاتسكي المتجهية (شكل إغناتشاك ـ ديشليفيتش) (1.55) - (1.65) إلى مسألة توازن :

باستخدام مؤثر لابلاس التكاملي وخواصه (انظر المقدمة) ، نحصل على العلاقات

المتجهية التالية في Ω :

$$\overline{[\vec{\nabla}^2 \vec{u}_{(p)}]} = \pounds\, [\vec{\nabla}^2 \vec{u}_{(p)}] = \vec{\nabla}^2 \bar{\vec{u}}_{(p)}$$

$$\overline{[\vec{\nabla}^2 \vec{u}_{(r)}]} = \pounds\, [\vec{\nabla}^2 \vec{u}_{(r)}] = \vec{\nabla}^2 \bar{\vec{u}}_{(r)}$$

$$\bar{\ddot{\vec{u}}}_{(p)} = \pounds\, [\ddot{\vec{u}}_{(p)}] = s^2\, \bar{\vec{u}}_{(p)} - [s\, \vec{f}_{(p)} + \vec{g}_{(p)}]$$

$$\bar{\ddot{\vec{u}}}_{(r)} = \pounds\, [\ddot{\vec{u}}_{(r)}] = s^2\, \bar{\vec{u}}_{(r)} - [s\vec{f}_{(r)} + \vec{g}_{(r)}]$$

حيث:

$$\bar{\vec{u}}_{(p)}(\boldsymbol{x}\,;s) = \int_0^\infty e^{-st}\, \vec{u}_{(p)}(\boldsymbol{x}\,,t)\, dt$$

و

$$\bar{\vec{u}}_{(r)}(\boldsymbol{x}\,;s) = \int_0^\infty e^{-st}\, \vec{u}_{(r)}(\boldsymbol{x}\,,t)\, dt$$

من أجل كل نقطة: $\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$.

بالتالي بعد تطبيق مؤثر لابلاس التكاملي، تؤول معادلات التحريك (1.55) و(1.56) مع الشروط الابتدائية (1.58) و(1.59) ، إلى معادلات التوازن التالية فيΩ :

$$(\lambda + 2\mu)\, \vec{\nabla}^2\, \bar{\vec{u}}_{(p)} - \rho\, \{ s^2\, \bar{\vec{u}}_{(p)} - [s\vec{f}_{(p)} + \vec{g}_{(p)}] \} = -\bar{\vec{X}}_{(p)}$$

$$\mu\, \vec{\nabla}^2\, \bar{\vec{u}}_{(r)} - \rho\, \{ s^2\, \bar{\vec{u}}_{(r)} - [s\vec{f}_{(r)} + \vec{g}_{(r)}] \} = -\bar{\vec{X}}_{(r)}$$

أو

$$[(\lambda + 2\mu)\, \vec{\nabla}^2 - \rho\, s^2]\, \bar{\vec{u}}_{(p)} = -\bar{\vec{X}}_{(p)} - \rho\, [s\, \vec{f}_{(p)} + \vec{g}_{(p)}]$$

$$(\mu\, \vec{\nabla}^2 - \rho\, s^2)\, \bar{\vec{u}}_{(r)} = -\bar{\vec{X}}_{(r)} - \rho\, [s\, \vec{f}_{(r)} + \vec{g}_{(r)}]$$

فإذا فرضنا أن: $c_1^2 = \dfrac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ و $\hat{c}_2^2 = \dfrac{\mu}{\rho}$ و $\sigma_1(s) = \dfrac{s}{c_1}$ و $\hat{\sigma}_2(s) = \dfrac{s}{\hat{c}_2}$

فتأخذ معادلات التوازن السابقة الشكل التالي فيΩ :

$$[\ \vec{\nabla}^2 - \sigma_1^2(s)\ ]\ \bar{\vec{u}}_{(p)} = -\frac{1}{\rho\ c_1^2}\ \bar{\vec{X}}_{(p)} - \frac{1}{c_1^2}\ [\ s\vec{f}_{(p)} + \vec{g}_{(p)}\ ]$$

$$[\ \vec{\nabla}^2 - \hat{\sigma}_2^2(s)\ ]\ \bar{\vec{u}}_{(r)} = -\frac{1}{\rho\ \hat{c}_2^2}\ \bar{\vec{X}}_{(r)} - \frac{1}{\hat{c}_2^2}\ [s\ \vec{f}_{(r)} + \vec{g}_{(r)}\ ]$$

والتي تكتب بإستخدام مؤثر هيلمهولتز التفاضلي المتجهي ، بالشكل التالي فيΩ :

$$\vec{\Box}^2_{i\sigma_1(s)}\ \bar{\vec{u}}_{(p)} = -\frac{1}{\rho\ c_1^2}\ \bar{\vec{X}}_{(p)} - \frac{1}{c_1^2}\ [s\ \vec{f}_{(p)} + \vec{g}_{(p)}\ ] \qquad (2.1)$$

$$\vec{\Box}^2_{i\hat{\sigma}_2(s)}\ \bar{\vec{u}}_{(r)} = -\frac{1}{\rho\ \hat{c}_2^2}\ \bar{\vec{X}}_{(r)} - \frac{1}{\hat{c}_2^2}\ [s\vec{f}_{(r)} + \vec{g}_{(r)}] \qquad (2.2)$$

حيث: $\vec{\Box}^2_{i\sigma_1(s)} := \vec{\nabla}^2 - \sigma_1^2(s)$ و $\vec{\Box}^2_{i\hat{\sigma}_2(s)} := \vec{\nabla}^2 - \hat{\sigma}_2^2(s)$ ، و $i = \sqrt{-1}$

نضيف إلى ذلك الشرط الحدي ، المتجهي ، التالي المحقق على $\partial\,\Omega$ ، والناتج عن تحويل الشرط الحدي المتجهي التحريكي (1.57) :

$$\bar{\vec{u}}_{(p)} + \bar{\vec{u}}_{(r)} = \bar{\vec{q}} \qquad (2.3)$$

إلى مسألة القيم الحدية السابقة . نضيف أيضاً المعادلات التفاضلية المتجهية ، المساعدة التالية في Ω ، والناتجة عن تحويل المعادلات المتجهية التحريكية المساعدة (1.60) و(1.61):

$$\vec{\nabla}^2\ \bar{\vec{X}}_{(p)} = \overrightarrow{grad}\ (\ div\ \bar{\vec{X}}\ ) \qquad (2.4)$$

$$\vec{\nabla}^2\ \bar{\vec{X}}_{(r)} = -\overrightarrow{rot}\ (\ \overrightarrow{rot}\ \bar{\vec{X}}\ ) \qquad (2.5)$$

كما نضيف أيضاً المعادلات التفاضلية المتجهية المساعدة التالية في Ω :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{f}_{(p)} = \overrightarrow{grad} \, (div \, \vec{f} \,) \tag{2.6}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{g}_{(p)} = \overrightarrow{grad} \, (div \, \vec{g} \,) \tag{2.7}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{f}_{(r)} = - \overrightarrow{rot} \, (\overrightarrow{rot} \, \vec{f} \,) \tag{2.8}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{g}_{(r)} = - \overrightarrow{rot} \, (\overrightarrow{rot} \, \vec{g} \,) \tag{2.9}$$

ثانياً : تحويل معادلات التوازن (2.1) و (2.2) مع الشروط الحدية (2.3) والمعادلات المساعدة (2.4) - (2.9) إلى مسألة جملة معادلات تكاملية

في البحث [11] تم تحويل معادلات التوازن (2.1) و (2.2) مع الشروط الحدية (2.3) و المعادلات المرافقة (2.4) - (2.9) ، إلى مسألة معادلات تكاملية على سطح الكرة المذكورة ، بالاعتماد على مبرهنتين هامتين تم برهانهما في البحث المذكور.المبرهنة الأولى تزودنا بتحويل غرين لمؤثر هيلمهولتز التفاضلي بشكليه المتجهي والسلمي ، أما المبرهنة الثانية فتزودنا بالشكل التكاملي لمعادلة هيلمهولتز التفاضلية المتجهية.فيمايلي سنستعرض هاتين المبرهنتين.

<u>مبرهنة I</u> :

إذا كانت الدالة المتجهية $\vec{\Phi}$ والدالة الحقيقية Φ ملساوين بالقدر الكافي في $\overline{\Omega}$ ($\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$) ، عندئذٍ تتحقق المتطابقة التكاملية المتجهية الآتية:

$$\int_{\Omega} [\, \vec{\Phi}(\boldsymbol{x}) \, \Box_C^2 \, \Phi(\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{x}) \, \overrightarrow{\Box}_C^2 \vec{\Phi}(\boldsymbol{x}) \,] \, d\Omega(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} [\, \vec{\Phi}(\boldsymbol{x}) \, \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{x}) \, \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial n}(\boldsymbol{x}) \,] \, dS(\boldsymbol{x}) \tag{2.10}$$

حيث: $d\Omega(\boldsymbol{x}) = dx_1 \, dx_2 \, dx_3$ و $\vec{n}$ متجه واحدة الناظم على السطح $\partial\Omega$، والموجَّه نحو خارج $\partial\Omega$ ، وإذا فرضنا أن: $\vec{\Phi} \equiv (\Phi_1 , \Phi_2 , \Phi_3)$ و $\vec{n} \equiv (n_1 , n_2 , n_3)$ فإن:

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial n} := \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} , \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} , \frac{\partial \Phi_3}{\partial n} \right) .$$

الإثبات :

استناداً إلى المقدمة نجد أنه من أجل القاعدة الديكارتية ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) للفضـاء الإقليدي R^3 ، يكون:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{U}(\boldsymbol{x}) = \left(\nabla^2 U_1(\boldsymbol{x}) \,,\, \nabla^2 U_2(\boldsymbol{x}) \,,\, \nabla^2 U_3(\boldsymbol{x})\right) \qquad (2.11)$$

$$\vec{\Box}_C^2 \vec{U}(\boldsymbol{x}) = \left(\Box_C^2 U_1(\boldsymbol{x}) \,,\, \Box_C^2 U_2(\boldsymbol{x}) \,,\, \Box_C^2 U_3(\boldsymbol{x})\right) \qquad (2.12)$$

حيث: $\vec{U}(\boldsymbol{x}) \equiv \left(U_1(\boldsymbol{x}) \,,\, U_2(\boldsymbol{x}) \,,\, U_3(\boldsymbol{x})\right)$.

باستخدام (2.12) ، والخاصة الخطية للتكامل الحجمي نستطيع أن نكتب:

$$\int_\Omega [\, \vec{\Phi}(\boldsymbol{x})\, \Box_C^2 \Phi(\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{x})\, \vec{\Box}_C^2 \vec{\Phi}(\boldsymbol{x}) \,]\, d\Omega(\boldsymbol{x}) =$$

$$\vec{e}_i \int_\Omega [\, \Phi_i(\boldsymbol{x})\, \Box_C^2 \Phi(\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{x})\, \Box_C^2 \Phi_i(\boldsymbol{x}) \,]\, d\Omega(\boldsymbol{x}) = \qquad (2.13)$$

$$= \vec{e}_i \int_\Omega [\, \Phi_i(\boldsymbol{x})\, \nabla^2 \Phi(\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{x})\, \nabla^2 \Phi_i(\boldsymbol{x}) \,]\, d\Omega(\boldsymbol{x})$$

لكن وفقاً لتحويل غرين من أجل مؤثر لابلاس السلمي ∇^2 لدينا:

$$\int_\Omega [\, \Phi_i(\boldsymbol{x})\, \nabla^2 \Phi(\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{x})\, \nabla^2 \Phi_i(\boldsymbol{x}) \,]\, d\Omega(\boldsymbol{x}) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} [\, \Phi_i(\boldsymbol{x})\, \frac{\partial \Phi}{\partial n}(\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{x})\, \frac{\partial \Phi_i}{\partial n}(\boldsymbol{x}) \,]\, dS(\boldsymbol{x}) \qquad (2.14)$$

حيث: $i = 1 \,,\, 2 \,,\, 3$.

الآن ، بتعويض (2.14) في (2.13) ، وبالاستفادة مرة أخرى من الخاصة الخطية للتكامل الحجمي ، نحصل على التحويل المتجهي (2.10).

مبرهنة II :

لتكن لدينا معادلة هيلمهولتز التفاضلية المتجهية التالية المحققة في Ω :

$$\vec{\Box}_C^2 \vec{U}(\boldsymbol{x}) = \vec{P}(\boldsymbol{x}) \qquad (2.15)$$

حيث $\vec{U}(\boldsymbol{x})$ الدالة المتجهية المجهولة و $\vec{P}(\boldsymbol{x})$ دالة متجهية معلومة. عندئذٍ فإن المعادلة

السابقة (2.15) تكافئ فيΩ ، المعادلة التكاملية المتجهية:

$$\vec{U}(\xi) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} \vec{P}(\boldsymbol{x}) \frac{e^{iCR}}{R} \, d\Omega(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega} [\frac{e^{iCR}}{R} \frac{\partial \vec{U}}{\partial n}(\boldsymbol{x}) - \vec{U}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial}{\partial n}(\frac{e^{iCR}}{R})] \, dS(\boldsymbol{x}) \qquad (2.16)$$

حيث: $\boldsymbol{x} \, , \, \xi \in \Omega$ و $R = | \boldsymbol{x} - \xi |$.

الإثبات:

أولاً: نفرض أن (2.15) محققة في Ω ، ولنثبت انطلاقاً من ذلك تحقق (2.16) ، في Ω.

ولهذا الغرض نستعين بمعادلة هيلمهولتز التفاضلية السلمية:

$$\Box_C^2 \, G(\boldsymbol{x}, \xi) = -\delta(\boldsymbol{x} - \xi) \qquad (2.17)$$

حيث: $\delta(\boldsymbol{x} - \xi)$ هو توزيع ديراك ثلاثي البعد (انظر [10]):

$$\delta(\boldsymbol{x} - \xi) = \delta(x_1 - \xi_1) \, \delta(x_2 - \xi_2) \, \delta(x_3 - \xi_3) \qquad (2.18)$$

وحيث: $\xi \equiv (\xi_1 , \xi_2 , \xi_3)$, $\boldsymbol{x} \equiv (x_1 , x_2 , x_3)$ ، أما $G(\boldsymbol{x}, \xi) = \dfrac{e^{iCR}}{4\pi R}$ ، فهي دالة غرين المتعلِّقة بمعادلة هيلمهولتز السلمية (2.17) .

ولنضرب الآن طرفي المعادلة (2.15) بـ $G(\boldsymbol{x}, \xi)$ ، وطرفي المعادلة (2.17) بـــ $\vec{U}(\boldsymbol{x})$ ، ومن ثم لنطرح المعادلة الناتجة الثانية من المعادلة الناتجة الأولى ، فنحصل على العلاقة التالية المحققة في Ω :

$$\vec{U}(\boldsymbol{x}) \, \delta(\boldsymbol{x} - \xi) = -\frac{1}{4\pi} \vec{P}(\boldsymbol{x}) \frac{e^{iCR}}{R} + \frac{1}{4\pi} [\frac{e^{iCR}}{R} \overrightarrow{\Box_C^2} \, \vec{U}(\boldsymbol{x}) - \vec{U}(\boldsymbol{x}) \, \Box_C^2 \frac{e^{iCR}}{R}] \qquad (2.19)$$

نكامل الآن طرفي العلاقة السابقة تكاملاً حجمياً على Ω ، ومن ثم بالاستفادة من المبرهنة السابقة ، ومن خاصة تصفية توزيع ديراك ، المتمثِّلة بالعلاقة التكاملية:

$$\int_{\Omega} \vec{U}(\boldsymbol{x})\, \delta\,(\,\boldsymbol{x}-\xi\,)\; d\Omega\,(\boldsymbol{x}) \;=\; \vec{U}(\xi) \qquad (2.20)$$

نحصل على المعادلة التكاملية (2.16) ، المحققة في Ω .

فيما يلي سنثبت العكس بطريقة جديدة.

ثانياً: لنفرض أن المعادلة التكاملية (2.16) محققة في Ω ، ولنثبت انطلاقاً من ذلك ، تحقق (2.15) في Ω. بتبديل كل ξ بـ $\boldsymbol{x}$ وكل $\boldsymbol{x}$ بـ ξ في المعادلة التكاملية (2.16) نحصل على المعادلة التكاملية الآتية المحققة في Ω :

$$\vec{U}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} \vec{P}(\xi)\, \frac{e^{iCR}}{R}\; d\Omega\,(\xi) \;+\; \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega} \Big[\; \frac{e^{iCR}}{R}\, \frac{\partial \vec{U}}{\partial n}\,(\xi) - \vec{U}(\xi)\, \frac{\partial}{\partial n}\Big(\frac{e^{iCR}}{R}\Big)\; \Big]\; dS\,(\xi) \qquad (2.21)$$

حيث هنا: $d\Omega\,(\xi) \;=\; d\,\xi_1\, d\,\xi_2\, d\,\xi_3$ و $dS\,(\xi)$ هو عنصر السطح $\partial\Omega$ حول النقطة $\xi \equiv (\,\xi_1\,,\,\xi_2\,,\,\xi_3)$ منه ، و $\vec{n} \equiv (\,n_1\,,\,n_2\,,\,n_3\,)$ متجه واحدة الناظم على السطح $\partial\Omega$ في النقطة ξ منه والموجَّه نحو خارج $\partial\Omega$ ، وإذا فرضنا أن $\vec{U} \equiv (\;U_1\,,\,U_2\;,U_3\;)$ فإن $\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{n}}$ في العلاقة السابقة ، هو بالتعريف: $\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{n}} := \Big(\;\frac{\partial U_1}{\partial n}\;,\;\frac{\partial U_2}{\partial n}\;,\;\frac{\partial U_3}{\partial n}\;\Big)$ ،

حيث $\frac{\partial U_i}{\partial n}$ هو مشتق الدالة السلمية U_i وفق منحى متجه الواحدة $\vec{n}$ وفي النقطة ξ :

$\frac{\partial U_i}{\partial n} \;=\; \vec{n}\cdot \overrightarrow{grad}\; U_i \;=\; n_j\; \frac{\partial U_i}{\partial\,\xi_j}$. فبتطبيق موثر هيلمهولتز المتجهي $\vec{\Box}_C^2$ على طرفي المعادلة التكاملية وبما أن النقطتين $\boldsymbol{x}$ و ξ مستقلتان ، فنحصل على العلاقة

التالية في Ω :

$$\vec{\Box}_C^2\, \vec{U}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} \vec{\Box}_C^2 \,[\; \vec{P}(\xi)\, \frac{e^{iCR}}{R} \;]\, d\Omega(\xi) \; +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega} \{\; \vec{\Box}_C^2 \,[\; \frac{e^{iCR}}{R}\, \frac{\partial \vec{U}}{\partial n}(\xi) \;] \qquad (2.22)$$

$$-\; \vec{\Box}_C^2 \,[\; \vec{U}(\xi)\, \frac{\partial}{\partial n}(\frac{e^{iCR}}{R}) \;]\; \}\; dS(\xi)$$

وبالاعتماد على العلاقة (2.12) من المبرهنة السابقة ، تأخذ العلاقة التكاملية المتجهية السابقة الشكل الآتي في Ω :

$$\vec{\Box}_C^2\, \vec{U}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} \vec{P}(\xi)\, \Box_C^2\, (\frac{e^{iCR}}{R})\; d\Omega(\xi) \; +$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega} \{\; \frac{\partial \vec{U}}{\partial n}(\xi)\, \Box_C^2\, (\frac{e^{iCR}}{R}) \qquad (2.23)$$

$$-\; \vec{U}(\xi)\, \Box_C^2 \,[\; \frac{\partial}{\partial n}(\frac{e^{iCR}}{R}) \;]\; \}\; dS(\xi)$$

باستخدام المعادلة التفاضلية السلمية (2.17) ، وكون أن توزيع ديراك هو توزيع زوجي فتأخذ العلاقة السابقة الشكل التالي في Ω :

$$\vec{\Box}_C^2\, \vec{U}(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} \vec{P}(\xi)\; \delta(\xi - \boldsymbol{x})\; d\Omega(\xi)$$

$$-\int_{\partial\Omega} [\; \frac{\partial \vec{U}}{\partial n}(\xi)\; \delta(\xi - \boldsymbol{x}) \qquad (2.24)$$

$$-\; \vec{U}(\xi)\, \frac{\partial}{\partial n}\, \delta(\xi - \boldsymbol{x}) \;]\; dS(\xi)$$

وبما أن $\boldsymbol{x} \in \Omega$ ، فإن $\boldsymbol{x} \notin \partial\Omega$. وبالتالي ينتج عن ذلك وعن خواص توزيع ديراك (انظر [10]) ، أن:

$$\int_{\Omega} \vec{P}(\xi)\ \delta(\xi - \boldsymbol{x})\ d\Omega(\xi) = \vec{P}(\boldsymbol{x}) \tag{2.25}$$

$$\int_{\partial\Omega} \vec{U}(\xi)\ \frac{\partial}{\partial n}\ \delta(\xi - \boldsymbol{x})\ dS(\xi) = 0 \tag{2.26}$$

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \vec{U}}{\partial n}(\xi)\ \delta(\xi - \boldsymbol{x})\ dS(\xi) = 0 \tag{2.27}$$

وباستخدام العلاقات التوزيعية السابقة ، تأخذ المعادلة التكاملية (2.24) الشكل التفاضلي المتجهي التالي في Ω :

$$\vec{\Box}_C^2\ \vec{U}(\boldsymbol{x}) = \vec{P}(\boldsymbol{x})$$

ونكون بذلك قد أثبتنا في هذه الأطروحة ، بطريقة جديدة ، الاتجاه الثاني للمبرهنة.

تم في [11] الحصول على المعادلات التكاملية المطلوبة ، بتطبيق المبرهنة السابقة على المعادلات التفاضلية الأساسية (2.1) و (2.2) والمعادلات التفاضلية المرافقة (2.4) و (2.5) و (2.6) و (2.7) و (2.8) و (2.9) . بالتالي تم الحصول على المعادلات التكاملية التالية المحققة في Ω :

- *المعادلات التكاملية الأساسية المحققة في Ω :*

(2.28)

$$\bar{\vec{u}}_{(p)}(\boldsymbol{\xi}\,;s) = \frac{1}{4\pi\rho c_1^2}\int_{\Omega} \frac{e^{-\sigma_1(s)R}}{R}\ \{\bar{\vec{X}}_{(p)}(\boldsymbol{x}\,;s) + \rho\,[s\vec{f}_{(p)}(\boldsymbol{x}) +$$

$$+\ \vec{g}_{(p)}(\boldsymbol{x})\ ]\ \}\ d\Omega(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}[\ \frac{e^{-\sigma_1(s)R}}{R}\ \frac{\partial\bar{\vec{u}}_{(p)}}{\partial n}(\boldsymbol{x}\,;s)$$

$$-\ \bar{\vec{u}}_{(p)}(\boldsymbol{x}\,;s)\ \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-\sigma_1(s)R}}{R}\right)]\ dS(\boldsymbol{x})$$

$$\bar{\vec{u}}_{(r)}(\boldsymbol{\xi}\,;s)=\frac{1}{4\pi\rho\,\hat{c}_2^2}\int_{\Omega}\frac{e^{-\hat{\sigma}_2(s)\,R}}{R}\;\{\bar{\vec{X}}_{(r)}(\boldsymbol{x}\,;s)+\rho\,[\,s\vec{f}_{(r)}(\boldsymbol{x})+$$

$$+\;\vec{g}_{(r)}(\boldsymbol{x})\;]\;\}\;d\,\Omega\,(\boldsymbol{x})+\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}[\;\frac{e^{-\hat{\sigma}_2(s)\,R}}{R}\;\frac{\partial\,\bar{\vec{u}}_{(r)}}{\partial\,n}(\boldsymbol{x}\,;s) \qquad (2.29)$$

$$-\,\bar{\vec{u}}_{(r)}(\boldsymbol{x}\,;s)\,\frac{\partial}{\partial\,n}\,(\,\frac{e^{-\hat{\sigma}_2(s)\,R}}{R}\,)\;]\;d\,S\,(\boldsymbol{x})$$

- المعادلات التكاملية المرافقة أو المساعدة ، المحققة في Ω :

$$\bar{\vec{X}}_{(p)}(\boldsymbol{\xi}\,;s)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{R}\;\overrightarrow{grad}\;div\;\bar{\vec{X}}(\boldsymbol{x}\,;s)\;\;d\,\Omega\,(\boldsymbol{x})\;+$$

$$+\,\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}[\;\frac{1}{R}\;\frac{\partial\,\bar{\vec{X}}_{(p)}}{\partial\,n}(\boldsymbol{x}\,;s)-\bar{\vec{X}}_{(p)}(\boldsymbol{x}\,;s)\,\frac{\partial}{\partial\,n}\,(\frac{1}{R})\;]\;d\,S\,(\boldsymbol{x}) \qquad (2.30)$$

$$\bar{\vec{X}}_{(r)}(\boldsymbol{\xi}\,;s)=\;\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{R}\;\overrightarrow{rot}\;\;\overrightarrow{rot}\;\bar{\vec{X}}(\boldsymbol{x}\,;s)\;\;d\,\Omega\,(\boldsymbol{x})\;+$$

$$+\,\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}[\;\frac{1}{R}\;\frac{\partial\,\bar{\vec{X}}_{(r)}}{\partial\,n}(\boldsymbol{x}\,;s)-\bar{\vec{X}}_{(r)}(\boldsymbol{x}\,;s)\,\frac{\partial}{\partial\,n}\,(\frac{1}{R})\;]\;d\,S\,(\boldsymbol{x}) \qquad (2.31)$$

$$\vec{f}_{(p)}(\boldsymbol{\xi})\;=\;-\frac{1}{4\pi}\;\int_{\Omega}\frac{1}{R}\;\overrightarrow{grad}\;\;div\;\;\vec{f}\,(\boldsymbol{x})\;\;d\,\Omega\,(\boldsymbol{x})\;\;+$$

$$+\,\frac{1}{4\pi}\;\int_{\partial\Omega}[\;\;\frac{1}{R}\;\;\frac{\partial\,\vec{f}_{(p)}}{\partial\,n}(\boldsymbol{x})\;\;-\;\vec{f}_{(p)}(\boldsymbol{x})\;\frac{\partial}{\partial\,n}\,(\frac{1}{R})\;\;]\;d\,S\,(\boldsymbol{x}) \qquad (2.32)$$

$$f_{(r)}(\xi) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{R}\,\overrightarrow{rot}\;\overrightarrow{rot}\;\vec{f}(\boldsymbol{x})\,d\Omega(\boldsymbol{x}) + \\ + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial\vec{f}_{(r)}}{\partial n}(\boldsymbol{x}) - \vec{f}_{(r)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right]dS(\boldsymbol{x}) \tag{2.33}$$

$$\vec{g}_{(p)}(\xi) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{R}\,\overrightarrow{grad}\;div\;\vec{g}(\boldsymbol{x})\;d\Omega(\boldsymbol{x}) + \\ + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial\vec{g}_{(p)}}{\partial n}(\boldsymbol{x}) - \vec{g}_{(p)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right]dS(\boldsymbol{x}) \tag{2.34}$$

$$\vec{g}_{(r)}(\xi) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{1}{R}\,\overrightarrow{rot}\;\overrightarrow{rot}\;\vec{g}(\boldsymbol{x})\,d\Omega(\boldsymbol{x}) + \\ + \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial\vec{g}_{(r)}}{\partial n}(\boldsymbol{x}) - \vec{g}_{(r)}(\boldsymbol{x})\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right]dS(\boldsymbol{x}) \tag{2.35}$$

بما أن الشكل البدائي للجسم هو كرة مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها a فقد تم في البحث المذكور الانتقال إلى الإحداثيات الكروية: $\boldsymbol{x} = (r, \theta, \varphi)$ و $\xi = (r', \theta', \varphi')$ ، حيث Ω : $0 \le r \le a\;,\; 0 \le \theta \le \pi\;,\; 0 \le \varphi < 2\pi$ و $d\Omega(\boldsymbol{x}) = r^2\sin\theta\;dr\;d\theta\;d\varphi$ أما $\partial\Omega$ فتتعيَّن كروياً بالشكل : $r = a\;,\; 0 \le \theta \le \pi\;,\; 0 \le \varphi < 2\pi$ ، وعنصر السطح $dS(\boldsymbol{x}) = r^2\sin\theta\;d\theta\;d\varphi$ ، وكذلك: $\frac{\partial f}{\partial n}(r, \theta, \varphi) = \partial_r f(r, \theta, \varphi)$ ، (حيث: $\partial_r f(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta, \varphi)$) ، وبذلك تأخذ جملة المعادلات التكاملية المتجهية (2.28) ـــ (2.35) الشكل المتجهي الكروي الآتي في Ω :

$$\bar{\vec{u}}_{(p)}(r', \theta', \varphi'; s) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho c_1^2} \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \{ \bar{\vec{X}}_{(p)}(r, \theta, \varphi; s) +$$

$$+ \rho \, [\, s \vec{f}_{(p)}(r, \theta, \varphi) + \vec{g}_{(p)}(r, \theta, \varphi) \,] \, \} \, \frac{e^{-\sigma_1(s) R}}{R} \, d\varphi \; + \qquad (2.36)$$

$$+ \frac{a^2}{4\pi} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} [\, \frac{e^{-\sigma_1(s) R_1}}{R_1} \, \frac{\partial \bar{\vec{u}}_{(p)}}{\partial r}(a, \theta, \varphi; s)$$

$$- \bar{\vec{u}}_{(p)}(a, \theta, \varphi; s) \, (\frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-\sigma_1(s) R}}{R})_{r=a} \,] \, d\varphi$$

$$\bar{\vec{u}}_{(r)}(r', \theta', \varphi'; s) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho \hat{c}_2^2} \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \{ \bar{\vec{X}}_{(r)}(r, \theta, \varphi; s) +$$

$$+ \rho \, [\, s \vec{f}_{(r)}(r, \theta, \varphi) + \vec{g}_{(r)}(r, \theta, \varphi) \,] \, \} \, \frac{e^{-\hat{\sigma}_2(s) R}}{R} \, d\varphi \; + \qquad (2.37)$$

$$+ \frac{a^2}{4\pi} \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} [\, \frac{e^{-\hat{\sigma}_2(s) R_1}}{R_1} \, \frac{\partial \bar{\vec{u}}_{(r)}}{\partial r}(a, \theta, \varphi; s)$$

$$- \bar{\vec{u}}_{(r)}(a, \theta, \varphi; s) \, (\frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{-\hat{\sigma}_2(s) R}}{R})_{r=a} \,] \, d\varphi$$

$$\vec{\bar{\bar{X}}}_{(p)}(r', \theta', \varphi'; s) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{R}\, \overrightarrow{grad}\ div\ \vec{\bar{\bar{X}}}(r, \theta, \varphi; s)\ d\varphi +$$

$$+\frac{a^2}{4\pi}\int_0^\pi \sin\theta\ d\theta \int_0^{2\pi} [\frac{1}{R_1}\frac{\partial \vec{\bar{\bar{X}}}_{(p)}}{\partial r}(a, \theta, \varphi; s) \tag{2.38}$$

$$- \vec{\bar{\bar{X}}}_{(p)}(a, \theta, \varphi; s)(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{R})_{r=a}]\ d\varphi$$

$$\vec{\bar{\bar{X}}}_{(r)}(r', \theta', \varphi'; s) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{R}\ \overrightarrow{rot}\ \overrightarrow{rot}\ \vec{\bar{\bar{X}}}(r, \theta, \varphi; s)\ d\varphi +$$

$$+\frac{a^2}{4\pi}\int_0^\pi \sin\theta\ d\theta \int_0^{2\pi} [\frac{1}{R_1}\frac{\partial \vec{\bar{\bar{X}}}_{(r)}}{\partial r}(a, \theta, \varphi; s) \tag{2.39}$$

$$- \vec{\bar{\bar{X}}}_{(r)}(a, \theta, \varphi; s)(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{R})_{r=a}]\ d\varphi$$

$$\vec{f}_{(p)}(r', \theta', \varphi') =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{R}\ \overrightarrow{grad}\ div\ \vec{f}(r, \theta, \varphi)\ d\varphi +$$

$$+\frac{a^2}{4\pi}\int_0^\pi \sin\theta\ d\theta \int_0^{2\pi} [\frac{1}{R_1}\frac{\partial \vec{f}_{(p)}}{\partial r}(a, \theta, \varphi) \tag{2.40}$$

$$- \vec{f}_{(p)}(a, \theta, \varphi)(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{R})_{r=a}]\ d\varphi$$

$$\vec{f}_{(r)}(r', \theta', \varphi') =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} \; \overrightarrow{rot} \; \overrightarrow{rot} \; \vec{f}(r, \theta, \varphi) \; d\varphi \; +$$

$$+ \frac{a^2}{4\pi} \int_0^\pi \sin\theta \; d\theta \int_0^{2\pi} [\frac{1}{R_1} \frac{\partial \vec{f}_{(r)}}{\partial r}(a, \theta, \varphi) \tag{2.41}$$

$$- \vec{f}_{(r)}(a, \theta, \varphi)(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{R})_{r=a}] \; d\varphi$$

$$\vec{g}_{(p)}(r', \theta', \varphi') =$$

$$= - \frac{1}{4\pi} \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} \; \overrightarrow{grad} \; div \; \vec{g}(r, \theta, \varphi) \; d\varphi \; +$$

$$+ \frac{a^2}{4\pi} \int_0^\pi \sin\theta \; d\theta \int_0^{2\pi} [\frac{1}{R_1} \frac{\partial \vec{g}_{(p)}}{\partial r}(a, \theta, \varphi) \tag{2.42}$$

$$- \vec{g}_{(p)}(a, \theta, \varphi)(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{R})_{r=a}] \; d\varphi$$

$$\vec{g}_{(r)}(r', \theta', \varphi') =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} \; \overrightarrow{rot} \; \overrightarrow{rot} \; \vec{g}(r, \theta, \varphi) \; d\varphi \; +$$

$$+ \frac{a^2}{4\pi} \int_0^\pi \sin\theta \; d\theta \int_0^{2\pi} [\frac{1}{R_1} \frac{\partial \vec{g}_{(r)}}{\partial r}(a, \theta, \varphi) \tag{2.43}$$

$$- \vec{g}_{(r)}(a, \theta, \varphi)(\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{R})_{r=a}] \; d\varphi$$

حيث : $R=\sqrt{r^2+r'^2-2\,r\,r'[\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')]}$ ، كما أن : $R_1=\sqrt{a^2+r'^2-2\,a\,r'[\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')]}$ ، و أذا كانت: $\vec{f}=f_r\,\vec{e}_r+f_\theta\,\vec{e}_\theta+f_\varphi\,\vec{e}_\varphi$ ، (حيث: $(\vec{e}_r\,,\,\vec{e}_\theta\,,\,\vec{e}_\varphi)$ القاعدة الكروية) ، وكانت f دالة حقيقية بالمتحولات الكروية $(r\,,\theta\,,\varphi)$ فإن كلاً من $\partial_r\vec{f}$ و $div\,\vec{f}$ و $\overrightarrow{rot}\,\vec{f}$ و $\overrightarrow{grad}\,f$ يعطى على الترتيب في القاعدة الكروية المذكورة كما يلي (انظر [9]):

$$\partial_r\vec{f}=\partial_r f_r\,\vec{e}_r+\partial_r f_\theta\,\vec{e}_\theta+\partial_r f_\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

$$div\,\vec{f}=\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 f_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\,\partial_\theta(f_\theta\sin\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\,\partial_\varphi f_\varphi$$

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{f}=\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}[\,\partial_\theta(r\sin\theta\,f_\varphi)-\partial_\varphi(r\,f_\theta)\,]+$$

$$+\frac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta}[\,\partial_\theta f_r-\partial_r(r\sin\theta\,f_\varphi)\,]+$$

$$+\frac{\vec{e}_\varphi}{r}[\,\partial_r(r\,f_\theta)-\partial_\theta f_r\,]$$

$$\overrightarrow{grad}\,f=\partial_r f\;\vec{e}_r+\frac{1}{r}\,\partial_\theta f\;\vec{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\,\partial_\varphi f\;\vec{e}_\varphi$$

(حيث $\partial_\theta=\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ و $\partial_\varphi=\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$).

آلية حل مسألة المعادلات التكاملية الناتجة :

بحل جملة المعادلات التكاملية المساعدة (2.38)—(2.43) ، نحصل على الجزء الكموني $\vec{X}_{(p)}$ والجزء الدوَّار $\vec{X}_{(r)}$ للدالة المعلومة $\vec{X}$ ، وعلى الجزء الكموني $\vec{f}_{(p)}$ والجزء الدوأر $\vec{f}_{(r)}$ للدالة المعلومة $\vec{f}$ ، كما نحصل على الجزء الكموني $\vec{g}_{(p)}$ والجزء الدوأر $\vec{g}_{(r)}$ للدالة المتجهية المعلومة $\vec{g}$.

نعوض الدوال المتجهية المحسوبة $\overline{\vec{X}}_{(p)}$ و $\overline{\vec{X}}_{(r)}$ و $\vec{f}_{(p)}$ و $\vec{f}_{(r)}$ و $\vec{g}_{(p)}$ و $\vec{g}_{(r)}$
في جملة المعادلتين التكامليتين المتجهيتين (2.36) و (2.37) ، فنحصل على معادلتين تكامليتين متجهيتين بالدالتين المتجهيتين المجهولتين $\overline{\vec{u}}_{(p)}$ و $\overline{\vec{u}}_{(r)}$.

نضيف إلى هاتين المعادلتين المذكورتين الشرط الحدي المتجهي التالي على $\partial\Omega$ ، والناتج عن كتابة الشرط الحدي المتجهي (2.3) بالشكل الكروي:

$$\overline{\vec{u}}_{(p)}(r,\theta,\varphi\,;s) + \overline{\vec{u}}_{(r)}(r,\theta,\varphi\,;s)\Big|_{r=a} = \overline{\vec{q}}\,(\theta,\varphi\,;s) \quad (2.44)$$

وبحل جملة المعادلات التكاملية المتجهية المذكورة ضمن الشرط الحدي المتجهي السابق، نحصل على الجزء الكموني $\overline{\vec{u}}_{(p)}(r,\theta,\varphi\,;s)$ والجزء الدوار $\overline{\vec{u}}_{(r)}(r,\theta,\varphi\,;s)$

المطلوبين للدالة المجهولة المحوَّلة $\overline{\vec{u}}\,(r,\theta,\varphi\,;s)$.

أخيراً بتطبيق تحويل لابلاس العكسي ([8]) ، نحصل على الحل المطلوب (الجزء الكموني) $\vec{u}_{(p)}(r,\theta,\varphi,t)$ والجزء الدوَّار $\vec{u}_{(r)}(r,\theta,\varphi,t)$ للدالة المتجهية المجهولة والمطلوبة $\vec{u}\,(r,\theta,\varphi,t)$. نعوض في صيغة ستوكس– هيلمهولتز (تقنية إغناتشاك) من أجل الدالة المتجهية المجهولة $\vec{u}$ ، فنحصل على الحل المطلوب:

$$\vec{u} = \vec{u}_{(p)} + \vec{u}_{(r)} \qquad \text{في} \ \overline{\Omega}\times T .$$

مسألة مفتوحة:

لنجعل نصف قطر كرة هوك المرنة $a \to \infty$ (جسم هوك المرن يشغل كل الفضاء الإقليدي $\boldsymbol{R}^3$). والمطلوب إيجاد صف الدوال المتجهية: $\vec{\bar{X}}_{(p)}$ و $\vec{\bar{X}}_{(r)}$ و $\vec{f}_{(p)}$ و $\vec{f}_{(r)}$ و $\vec{g}_{(p)}$ و $\vec{g}_{(r)}$ و $\vec{\bar{u}}_{(p)}$ و $\vec{\bar{u}}_{(r)}$ ، التي لأجلها نحصل من المعادلات التكاملية المتجهية:(2.36) و (2.37) و (2.38) — (2.43) ، مباشرةً ، على الحل المتجهي التكاملي التالي في $\boldsymbol{R}^3$:

الأجزاء الكمونية والأجزاء الدوَّارة في $\boldsymbol{R}^3$، للدوال المتجهية المعلومة :

$$\vec{\bar{X}}_{(p)}(r', \theta', \varphi'; s) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{R}\, \overrightarrow{grad}\; div\, \vec{\bar{X}}(r, \theta, \varphi; s)\; d\varphi \tag{2.45}$$

$$\vec{\bar{X}}_{(r)}(r', \theta', \varphi'; s) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{R}\, \overrightarrow{rot}\; \overrightarrow{rot}\; \vec{\bar{X}}(r, \theta, \varphi; s)\; d\varphi \tag{2.46}$$

$$\vec{f}_{(p)}(r', \theta', \varphi') = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{R}\, \overrightarrow{grad}\; div\, \vec{f}(r, \theta, \varphi)\; d\varphi \tag{2.47}$$

$$\vec{f}_{(r)}(r', \theta', \varphi') = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{R}\, \overrightarrow{rot}\; \overrightarrow{rot}\; \vec{f}(r, \theta, \varphi)\; d\varphi \tag{2.48}$$

$$\vec{g}_{(p)}(r', \theta', \varphi') =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{R}\, \overrightarrow{grad}\; div\; \vec{g}(r, \theta, \varphi)\; d\varphi \tag{2.49}$$

$$\vec{g}_{(r)}(r', \theta', \varphi') =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \frac{1}{R}\, \overrightarrow{rot}\; \overrightarrow{rot}\; \vec{g}(r, \theta, \varphi)\; d\varphi \tag{2.50}$$

الجزء الكموني والجزء الدوار في R^3 ، للدالة المتجهية المجهولة:

$$\bar{\vec{u}}_{(p)}(r', \theta', \varphi'; s) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho c_1^2}\int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \{\, \bar{\vec{X}}_{(p)}(r, \theta, \varphi; s) + \tag{2.51}$$

$$+\rho\, [\, s\vec{f}_{(p)}(r, \theta, \varphi) + \vec{g}_{(p)}(r, \theta, \varphi)\,]\,\}\; \frac{e^{-\sigma_1(s)\, R}}{R}\; d\varphi$$

$$\bar{\vec{u}}_{(r)}(r', \theta', \varphi'; s) =$$

$$= \frac{1}{4\pi\rho \hat{c}_2^2}\int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \{\, \bar{\vec{X}}_{(r)}(r, \theta, \varphi; s) + \tag{2.52}$$

$$+\rho\, [\, s\vec{f}_{(r)}(r, \theta, \varphi) + \vec{g}_{(r)}(r, \theta, \varphi)\,]\,\}\; \frac{e^{-\hat{\sigma}_2(s)\, R}}{R}\; d\varphi$$

أي المطلوب إيجاد صف الدوال المتجهية $\bar{\vec{X}}_{(p)}$ و $\bar{\vec{X}}_{(r)}$ و $\vec{f}_{(p)}$ و $\vec{f}_{(r)}$ و $\vec{g}_{(p)}$ و و $\vec{g}_{(r)}$ و $\bar{\vec{u}}_{(p)}$ و $\bar{\vec{u}}_{(r)}$ ، التي تعدم التكاملات السطحية في المعادلات التكاملية المتجهية (2.36) و (2.37) و (2.38) ـــــ (2.43) ، وتجعل التكاملات الحجمية فيها متقاربة.

The Summery of Mgr Thesis of Title:

Transforming the Partial Differential Equations of Elastic Body into Integral Equations on Spherical Surface

For mgr student : **Rasha Tulemat**

First promoter: **Prof. Taleb Gareeba**

Second Promoter : **Dr. Mountajab Al - Hasan**

Many scientific researchers in mechanics of contentious media found , that in several cases , transforming the problem of partial differential equations of the medium into problem of integral equations of this medium , makes the problem easier ;

In the Direct method , Nowacki (1970) transformed the problem of partial differential equations of elastic Hooke body into problem of integral equations of this body in the case , when the equations are nonhomogeneous , the boundary conditions are nonhomogeneous , but the initial conditions homogeneous. Ignaczak (1965 – 1972) , transformed Nowacki potential problem of differential equations of elastic Hooke body into

problem of integral equations of this body , in the case , when the equations are homogeneous , the boundary conditions are nonhomogeneous , the initial conditions nonhomogeneous, but in the special case , when the physical fields changes harmonically in time. Many other researchers (for example: Majzel) reach the same above mentioned results by different method (for example: by using the virtual work principle).

At the beginning of **2009** , Garreba , Al – Hasan and Tulemat published new results concerning general elastic Hooke body problem .These results are generalization of the above results, in a new method , to the general case of nonhomogeneous initial conditions of elastic Hooke body. In this new paper , the following results were discussed :

- At first , the the Nowacki potential method for elastic Hooke body was introduced in Ignaczak technical method based on writing the vectorial function as a sum of potential and rotational functions.
- Next, the Nowacki potential method expressed in Ignaczak technical method for elastic Hooke body was discussed in Dyszlewicz technical method based on dynamic vectorial differential linear operators, and the result method called the Nowacki potential method in Ignaczak – Dyszlewicz technical method for elastic Hooke body.

- Next , the problem of calculating the potential and rotational parts of given vectorial functions was discussed; the vectorial partial differential independent equations for the potential and rotational parts were derivatived.
- Finally, after this above completing the problem, the Nowacki potential problem in Ignaczk – Dyszlewicz technical method for elastic Hooke body was transformed into problem of integral equations by the following:

1) using the integral Laplace transform the problem of dynamical Hooke body was transformed from dynamics to equilibrium.

2) Two important theorems were formed and proved. In new way , by means of these two theorems, the above problem of equilibrium equations was transformed into problem of integral equations. The case of spherical elastic Hooke body was taken under considerations and the surface parts of above integral equations were on this spherical surface of elastic Hooke body.

This thesis is an extension of above mentioned paper and ended by important opened problem about elastic spherical Hooke body of radius a *tending to infinity . The thesis contains the following chapters:*

First chapter : An Introduction in Mathematical Analysis and It's Applications

This chapter contains the required definitions , theorems and conclusions from mathematical analysis and tensorial algebra ;

for instance : Gauss theorem , integral Green identity for scalar laplacian , Stocs – Helmholtz theorem , Levi – chevity permutation , Laplace integral transform , … etc.

Second chapter : Representing the Problem.

This chapter contains the following important points:

- The definition , dynamic elastic state and the mathematical model of elastic Hooke body.
- Lame problem of elastic Hooke body.
- Vectorial Lame problem in Dyszlewicz mathematical technology for elastic Hooke body.
- Nowacki potential problem of elastic Hooke body.
- Nowacki potential problem in Dyszlewicz mathematical technology for elastic Hooke body.
- Stocs – Helmholtz theorem of Ignaczak form.
- Potential Nowacki problem in Ignaczak mathematical technology for elastic Hooke body.

- Vectorial initial – boundary value Nowacki potential problem in Ignaczak – Dyszlewicz mathematical technology for elastic Hooke body.
- Derivativing the independent , vectorial partial differential equations defining the potential and rotational parts of the given vectorial functions.
- Represent the vectorial Nowacki potential problem in Ignaczk – Dyszlewicz form , completed by the vectorial partial differential equations defining the potential and rotational parts of the given vectorial functions.

Third chapter: Transforming the Partial Differential Equations of Elastic Hooke Body into Integral Equations on Spherical Surface

This chapter includes the following important results:

- First , the results of [11] , which concern transforming the last completed problem into problem of integral equations of elastic Hooke body on spherical surface was discussed in details as the following :

1) Using Laplace integral transform , the mentioned completed problem of vectorial partial differential equations of considerable body was transformed from dynamical problem to equilibrium one and equilibrium problem of this body was obtained.

2) Next , two important theorems formed and proved. First of them related to vectorial Green integral identity for scalar – vectorial Helmholtz differential operator . The other theorem related to vecorial integral form of the nonhomogeneous, vectorial Helmholtz differential equations. Using these two theorems , the above mentioned vectorial equilibrium problem was transformed into vectorial integral problem. The way of transforming using these two theorem is new way (see [11]). The case of initial spherical form of the elastic Hooke body was considered , so the spherical coordinates was used, and the mentioned vectorial integral problem was written in the spherical coordinates. Next , it was shown, how to solve the resulting vectorial integral problem.

- Finally , the following important opened problem relating to the elastic Hooke body of radius a tending to infinity was putted: Finding the class vectorial functions: $\bar{\vec{X}}_{(p)}$, $\bar{\vec{X}}_{(r)}$, $\vec{f}_{(p)}$, $\vec{f}_{(r)}$, $\vec{g}_{(p)}$, $\vec{g}_{(r)}$, $\bar{\vec{u}}_{(p)}$, $\bar{\vec{u}}_{(r)}$ in $\boldsymbol{R}^3$, for which the surface parts of resulting vectorial equations vanish and the known volume parts remain to give the final vectorial form of the solution in the transformate form :

المراجع
(References)

[1]-Nowacki ,Theory of Elasticity , Warsaw PWN , **1970** .

[2] - Ignaczak i Nowacki , Osobliwe równania całkowe termosprężystości, Rosprawe Inżynierskie,**13(1965)**,655-670.

[3]- kupradse , Gegelya ,Bashelishili , Burchuladse , Three – Dimensional Problems of The Mathematical Theory of Elasticity and Thermoelasticity , Izd.Nauka.Moscow ,**1968** and **1976**.

[4]–Dyszlewicz , J , **1996** - Selected problems of linear asymme- trical thermoelasticity, Journal of Thermal Stresesses,19, 185-206.

[5] **–**Dyszlewicz , J , **1983** - Three - dimensional problems in micropolar theory of elasticity , Stud. Geotech. et Mech., 5 , 1.

[6]-Ignaczak , Radiation conditions of Sommerfeld type for elastic materials with microstrecture , Bull.Acad.Polon.Sci. Sér.Sci. **18(1970)**,6-473,

[7]- Ignaczak , Radiation conditions in asymmetric elasticity, J.Ela.**2(1972)**,307-321.

[8] **–** Sneddon , I.N. , **1972** – The Use of Integral Transforms, McGraw-Hell, New York.

[9] **–** Heinbockel , J. H , **1996** – Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics , Department of Mathematics and Statistics , Old Dominion University.

[10] - Marcinkowska , Wstęp do Teorii Równań Różniczkowych Częstkowych , PWN , Warsaw , **1986**.

[11] – Gareeba , T , Al-Hasan , M , Tulemat , R , **2009** - using volume - surface transforms for translating the differential equations of elastic body into integral equations , Journal of Al – Baath University, Vol. 31.